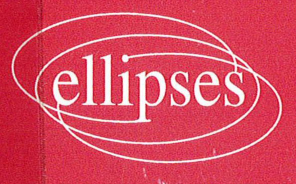
MATHÉMATIQUES
2[e] cycle

Cours et exercices corrigés

Collection dirigée par
Charles-Michel Marle
Philippe Pilibossian

Éléments d'intégration et d'analyse fonctionnelle

Aziz El Kacimi Alaoui



MATHÉMATIQUES POUR LE 2E CYCLE

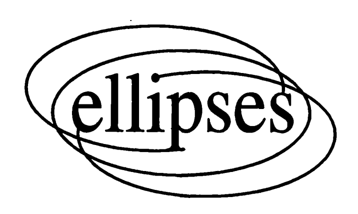
Collection dirigée par Charles-Michel MARLE et Philippe PILIBOSSIAN

ÉLÉMENTS D'INTÉGRATION ET D'ANALYSE FONCTIONNELLE

AZIZ EL KACIMI ALAOUI

Professeur

Université de Valenciennes



Dans la même collection *Mathématiques pour le 2e cycle*

- *Topologie,* Gilles Christol, Anne Cot, Charles-Michel Marle, 192 pages.
- *Calcul différentiel,* Gilles Christol, Anne Cot, Charles-Michel Marle, 224 pages.
- *Intégration et théorie de la mesure - Une approche géométrique,* Paul Krée, 240 pages.
- *Éléments d'analyse convexe et variationnelle,* Dominique Azé, 240 pages.
- *Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux,* Philippe Saux Picart, 192 pages.
- *Distributions - Espaces de Sobolev, Applications,* Marie-Thérèse Lacroix-Sonrier, 160 pages.
- *Théorie de Galois,* Ivan Gozard, 224 pages.
- *Quelques aspects des mathématiques actuelles,* ouvrage collectif, 256 pages.

Du même auteur

- *Éléments de statistique descriptive,* Collection arabisation et connaissances, éditions Maghrébines, Casablanca, 1986.

ISBN 2-7298-4918-1

Présentation de la Collection

Mathématiques pour le deuxième cycle

Cette collection se propose de mettre à la disposition des étudiants de licence et de maîtrise de mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels, et de nombreux exercices avec leurs solutions.

Les auteurs de ces ouvrages ont tous une grande expérience de l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

L'Analyse fonctionnelle est une branche maîtresse des mathématiques, qui traite des propriétés topologiques et métriques des espaces de fonctions. Elle joue un rôle central dans des domaines aussi divers que variés : équations différentielles, équations aux dérivées partielles, groupes de Lie et leurs représentations, ... Le Professeur El Kacimi Alaoui en présente dans cet ouvrage les éléments de base et en développe des applications aux équations différentielles. La théorie de l'intégration, outil indispensable de l'analyse fonctionnelle, est également introduite. Ce livre permettra au lecteur d'en revoir les principaux théorèmes sous une forme adaptée aux besoins de l'analyse fonctionnelle et d'aller au delà, vers certaines de leurs applications concrètes.

Charles–Michel Marle — Philippe Pilibossian

A la mémoire de mon père.
Il nous avait toujours enseigné,
mes frères et moi, le sens de
l'honnêteté, de la dignité et du travail.

A Norreddine Mahammed.
Il était mathématicien et homme
de culture. Avec lui, nous avions partagé de
la joie et du rêve. Il est parti tôt mais il vit
toujours dans nos cœurs et nos mémoires.

AVANT-PROPOS

L'analyse fonctionnelle est un thème central dans beaucoup de branches des mathématiques : équations aux dérivées partielles, analyse complexe, analyse globale sur les variétés, géométrie différentielle... Son objet est l'étude, sous divers aspects et en particulier l'aspect topologique, des espaces fonctionnels $E = \mathcal{F}(Y, \mathbb{K})$ et de leurs opérateurs ($\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si l'ensemble Y est fini, l'espace E est de dimension finie. Toutes les topologies raisonnables (séparées et rendant continues les opérations somme et multiplication par un scalaire) qu'on peut y définir sont alors les mêmes et n'importe quel opérateur sur E est continu. Sur de tels espaces on peut donc se donner la liberté de choisir la façon la plus simple et la plus maniable pour définir sa topologie. Lorsque Y est infini l'espace vectoriel E peut être "très grand" et la situation peut devenir plus complexe. Mais, en général, on se limite à un sous-espace vectoriel strict de E ; d'abord parce qu'on n'a pas besoin de tous les éléments de E, ensuite parce qu'on ne sait pas toujours définir des topologies utiles sur E tout entier. En pratique Y est un espace topologique ou un espace mesuré et les fonctions qu'on considère sur Y sont au moins continues ou mesurables. Si Y est dénombrable, E est l'espace des suites (réelles ou complexes). On sait alors que, si on le munit de la topologie discrète, toute fonction (*i.e.* une suite) $Y \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue. Mais même dans ce cas il faut encore prendre des suites particulières pour tomber sur des espaces intéressants ! (par exemple les suites bornées, nulles à l'infini, de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable...). Lorsque Y n'est plus dénombrable tout se complique encore plus. Sur Y lui-même il faut déjà une structure topologique assez bonne. Heureusement la plupart des problèmes font appel à des fonctions (mesurables, continues, différentiables, analytiques...) sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. Cela permet de définir toute une gamme d'espaces fonctionnels munis de topologies compatibles avec la structure vectorielle ; beaucoup d'entre elles sont définies par des métriques invariantes par translation.

Ce sont ces objets qu'on se propose d'étudier de façon élémentaire dans ce cours destiné aux étudiants de Maîtrise de mathématiques. Le chapitre préliminaire est un rappel des notions de base en topologie comprenant trois théorèmes importants : l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une application contractante, le théorème de Baire et le théorème d'Ascoli. Dans le chapitre I on introduit la notion d'algèbre de Boole et celle de tribu ou σ-algèbre. Ensuite on définit les fonctions mesurables et on donne leurs propriétés essentielles. Le chapitre II introduit la notion de mesure sur une tribu et certaines de ses propriétés. On démontre le théorème de prolongement d'une mesure à la tribu engendrée par une semi-algèbre de Boole et on l'utilise pour construire la mesure produit sur un produit fini d'espaces mesurés ainsi que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On termine par la notion de propriété vérifiée presque partout fondamentale en analyse. Dans le chapitre III on définit l'intégrale au sens de Lebesgue sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ quelconque. On y démontre le théorème de convergence dominée (ou théorème de Lebesgue) et on en donne les applications les

plus importantes : passage à la limite sous le signe somme et dérivation d'une intégrale. Dans le chapitre IV on démontre un résultat important en théorie de l'intégration : le théorème de Fubini qui permet de calculer l'intégrale (d'une fonction intégrable) sur un espace produit en intégrant successivement sur chacun des facteurs. On y définit aussi les mesures à densité et on démontre le théorème de Radon-Nikodym dans le cadre général des mesures à signe (*i.e.* non forcément positives) ainsi que le théorème de transfert. Bien qu'on n'étudie que les espaces normés on a jugé utile d'introduire dans le chapitre V la notion d'espace vectoriel topologique en insistant sur les exemples. On y a inclu la démonstration du théorème de Riesz sur l'équivalence de la dimension finie et la compacité locale d'un e.v.t. séparé ainsi que l'étude des séries et des familles sommables dans le cas normé. Dans le chapitre VI on étudie les propriétés des applications linéaires continues. On y démontre quelques théorèmes d'intérêt incontestable : le théorème de Banach, le théorème de Banach-Schauder et le théorème du graphe fermé. Le théorème de Hahn-Banach est présenté sous ses deux formes : géométrique et analytique. Dans le chapitre VII on aborde la dualité dans les espaces normés : dual topologique et ses différentes topologies (faible, forte...), topologie affaiblie sur un espace normé, réflexivité, transposition. Un exemple d'espace réflexif et un autre non réflexif sont donnés en détail. Le chapitre VIII est consacré aux espaces de Hilbert. Après l'introduction des ingrédients essentiels, on démontre le théorème de projection orthogonale et le théorème caractérisant les bases hilbertiennes. Dans le chapitre IX on étudie les opérateurs bornés sur un espace normé, leur spectre et puis les opérateurs compacts. Enfin le chapitre X précise certaines propriétés des opérateurs bornés agissant sur un espace de Hilbert. On y démontre notamment le théorème de décomposition spectrale pour un opérateur hermitien compact qui montre à quel point les opérateurs de ce type s'apparentent fortement à leurs analogues en dimension finie. Quelques applications aux équations différentielles et plus particulièrement à la théorie de Sturm-Liouville sont données dans le chapitre XI. Dans compléments 1 on calcule explicitement le volume des boules et des sphères de $\mathbb{R}^n$. Dans compléments 2 on construit l'intégrale de Riemann d'une fonction bornée sur un intervalle compact $[a, b]$; puis on donne la condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité au sens de Riemann et le lien avec l'intégrale de Lebesgue. Dans l'appendice on énonce l'axiome du choix et le lemme de Zorn utilisés dans la démonstration de certains théorèmes. Nous terminons par les corrigés des différents exercices. Les solutions sont plus ou moins détaillées en fonction de la nature et de la difficulté de chacun d'eux.

Les références citées en bibliographie ne sont pas toutes utilisées ; elles sont données à titre d'information au lecteur qui désire en savoir plus. On n'a pas inclu un index spécifique aux notations ; elles sont toutes définies au fur et à mesure de leur introduction. Le renvoi à une référence se fait comme sur les exemples suivants : "théorème IX. 4.5" signifie théorème 4.5 du chapitre IX ; proposition "0. 1.5" signifie proposition 1.5 du chapitre préliminaire ; "(III. 4)" signifie relation 4 du chapitre III *etc.*

Ce texte est la rédaction d'un cours dont j'ai la responsabilité en Maîtrise de Mathématiques depuis déjà quelques années à l'Université de Valenciennes. Les réactions et remarques pertinentes de mes étudiants des différentes promotions

m'ont suggéré d'améliorer et d'éclaircir la présentation de plusieurs énoncés et démonstrations. D'autre part, beaucoup d'entre eux m'ont aidé à corriger les erreurs de frappe. Je les en remercie chaleureusement. Charles-Michel MARLE a pris beaucoup de son temps pour lire le texte en détail et avec beaucoup d'attention ; ses remarques m'ont été très utiles. Avec Philippe PILIBOSSIAN ils ont accueilli ce cours dans leur collection et y ont jeté un dernier regard en vue de la version finale ; je leur présente mes remerciements les plus sincères. Pour composer cet ouvrage, j'ai profité du matériel mis à ma disposition par le laboratoire LAMATH de l'Université de Valenciennes et le laboratoire URA au CNRS GAT de l'Université de Lille I auquel j'ai appartenu pendant deux décennies ; qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma gratitude. C'est par le cours de Maîtrise "Compléments d'analyse" de Michel PARREAU que je me suis initié à l'analyse fonctionnelle ; il le professait avec beaucoup de motivation et de clarté. J'en garde un excellent souvenir.

Malgré le temps et les efforts investis, cet ouvrage peut manquer de perfection (erreurs de frappe, de distraction ou autre...) et présenter des lacunes. Aussi toutes critiques portant sur le fond ou la forme seront les bienvenues.

A. EL KACIMI

TABLE DES MATIÈRES

QUELQUES RAPPELS DE TOPOLOGIE
1. Quelques définitions ... 1
2. Quelques théorèmes ... 6
3. Exercices ... 8

I. ESPACES MESURABLES
1. Algèbres de Boole ... 9
2. Motivation probabiliste ... 11
3. La notion de tribu ... 12
4. Applications mesurables ... 13
5. Applications mesurables réelles ... 14
6. Exercices ... 18

II. ESPACES MESURÉS
1. Définitions et exemples ... 19
2. Propriétés des mesures ... 21
3. Le théorème de prolongement ... 25
4. Propriétés vérifiées presque partout ... 32
5. Exercices ... 33

III. INTÉGRALE DE LEBESGUE
1. Intégrale supérieure ... 35
2. Intégrale d'une fonction mesurable ... 39
3. Propriétés de l'intégrale ... 41
4. Le théorème de Lebesgue ... 43
5. Applications du théorème de Lebesgue ... 46
6. Exercices ... 48

IV. MESURES PRODUIT, MESURES IMAGES ET DENSITÉS
1. Le théorème de Fubini ... 51
2. Mesure image et transfert ... 54
3. Mesures à densité ... 55
4. Le théorème de Radon-Nikodym ... 57
5. Exemples ... 62
6. Exercices ... 65

V. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES
1. Généralités ... 67
2. E.V.T. localement convexes ... 69
3. Séries et familles sommables ... 72
4. Quelques exemples concrets d'E.V.T. ... 76
5. Exercices ... 78

VI. APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES
1. Généralités ... 81
2. Quelques théorèmes importants ... 84

3. Le Théorème de Hahn-Banach 86
4. Exemples 93
5. Exercices 95
VII. DUALITÉ DANS LES ESPACES NORMÉS
1. Notations et définitions 98
2. Réflexivité 101
3. Transposition 105
4. Exercices 106
VIII. ESPACES DE HILBERT
1. Formes bilinéaires 110
2. Généralités sur les espaces de Hilbert 112
3. Dualité dans les espaces de Hilbert 115
4. Sommes et bases hilbertiennes 116
5. Un exemple de base hilbertienne 120
6. Exercices 123
IX. OPÉRATEURS BORNÉS
1. Définitions et premières propriétés 127
2. Spectre d'un opérateur 130
3. Opérateurs compacts 133
4. Spectre d'un opérateur compact 137
5. Exercices 141
X. OPÉRATEURS DANS LES ESPACES DE HILBERT
1. Adjoint et opérateurs hermitiens 146
2. Opérateurs positifs 150
3. Spectre d'un opérateur hermitien compact 152
4. Exemple d'utilisation du spectre 155
5. Exercices 156
XI. APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
1. Généralités sur les équations différentielles 159
2. Équations linéaires 162
3. Le problème de Sturm-Liouville 165
4. Exercices 170
APPENDICE : AXIOME DU CHOIX ET LEMME DE ZORN 172
COMPLÉMENTS 1 : CALCUL DE VOLUMES 174
COMPLÉMENTS 2 : INTÉGRALE DE RIEMANN 180
SOLUTIONS DES EXERCICES 185
BIBLIOGRAPHIE 241
INDEX ALPHABÉTIQUE 243

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE
Quelques rappels de topologie

L'objet de ce chapitre est de rappeler les notions de base en topologie (ouvert, continuité, compacité, comparaison de topologies, métrisabilité...) et quelques théorèmes que nous utiliserons par la suite : existence et unicité d'un point fixe pour une application contractante, théorème de Baire, théorème d'Ascoli. Le lecteur peut trouver un cours plus développé de topologie dans [CCM1] par exemple.

1. Quelques définitions

1.1. Définition. *Soit X un ensemble non vide. On appelle* **topologie** *sur X la donnée d'une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de X) telle que*
i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$,
ii) toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$,
iii) toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.

Le couple $(X, \mathcal{T})$ est appelé *espace topologique.* On le notera simplement X quand il n'y a pas risque de confusion.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés *ouverts* de X ; le complémentaire (dans X) d'un ouvert est appelé *fermé.* Nous verrons par la suite que ces appellations se justifient amplement ; elles seront plus palpables sur des topologies particulières (dites *métrisables*).

Définir une topologie sur X, c'est définir une notion de proximité et donc de voisinage : on dira que V est un *voisinage* de $x \in X$ si V contient un ouvert contenant x. Evidemment toute partie de X contenant un voisinage de x est elle-même un voisinage de x. On appelle *système fondamental* de voisinages de $x \in X$ toute famille $\{U_i\}$ de voisinages de x telle que tout voisinage de x contient un élément de cette famille.

Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{S})$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite *continue au point* $x \in X$ si pour tout voisinage V de $y = f(x)$ dans Y il existe un voisinage U de x dans X tel que $f(U) \subset V$. On dira que f est *continue* sur X si elle est continue en tout point de X. On vérifie sans peine que f est continue si, et seulement si, l'image réciproque par f de tout ouvert de Y pour $\mathcal{S}$ est un ouvert de X pour $\mathcal{T}$. On dira que f est *ouverte* si l'image directe de tout ouvert de X est un ouvert de Y. Si f est bijective, continue et ouverte on dira que f est un *homéomorphisme* de X sur Y.

Soit X un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$. On dira que $\mathcal{T}_1$ est plus *fine* que $\mathcal{T}_2$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite
i) $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$,
ii) toute partie de X fermée pour $\mathcal{T}_2$ est fermée pour $\mathcal{T}_1$,
iii) l'application $id_X : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue.

Si $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille de topologies sur X alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une topologie sur X appelée *borne inférieure* de la famille $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$; elle est moins fine que n'importe

laquelle des topologies $\mathcal{T}_i$. Par contre $\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i$ n'est pas en général une topologie. Cependant si $(\mathcal{S}_j)_{j\in J}$ est la famille de toutes les topologies plus fines que n'importe laquelle des $\mathcal{T}_i$ alors la borne inférieure de $(\mathcal{S}_j)_{j\in J}$ sera par définition la *borne supérieure* de $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$. Cela se justifie bien sûr puisque c'est la moins fine des topologies sur X qui sont plus fines que n'importe quelle $\mathcal{T}_i$.

Soit $\mathcal{B}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$. La borne inférieure de toutes les topologies sur X contenant $\mathcal{B}$ est la *topologie engendrée* par $\mathcal{B}$.

Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{S})$ deux espaces topologiques. Posons $Z = X \times Y$ et $\mathcal{W} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$. Alors $\mathcal{W}$ engendre une topologie sur Z appelée *topologie produit* de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$. La même construction généralise cela au produit cartésien d'un nombre fini d'espaces topologiques $(X_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$.

1.2. Exemples

i) On pose $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, X\}$; cette famille de parties de X constitue une topologie sur X ; c'est la moins fine qu'on puisse y définir. On comprend alors facilement que la notion de proximité n'a pas beaucoup de d'intérêt dans ce cas : un point quelconque de X n'a qu'un seul voisinage. Cette topologie sera dite *grossière* et n'est presque jamais utilisée.

ii) Si, contrairement à ce qui précède, on pose $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(X)$ on obtient la topologie la plus fine sur X appelée *topologie discrète.* Mais celle-là est trop forte pour être utile ! Il faut chercher des topologies intermédiaires.

iii) La *topologie usuelle* (parce que c'est celle qu'on utilise tout le temps quand on ne spécifie rien) sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est la topologie engendrée par la famille des intervalles ouverts.

Les exemples les plus intéressants de topologies sur un ensemble X sont données par des métriques. Ils seront pratiquement les seuls auxquels nous nous intéresserons dans la suite.

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de X. On appelle :

- *adhérence* de A dans X le plus petit fermé noté $\overline{A}$ de X contenant A ; évidemment A est fermée si, et seulement si, $A = \overline{A}$; si $\overline{A} = X$ on dira que A est *dense* dans X ;
- *intérieur* de A le plus grand ouvert contenu dans A.

On dira qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *séparé* si pour tout x et tout y dans X distincts, il existe un voisinage U_x de x et un voisinage V_y de y tels que $U_x \cap V_y = \emptyset$.

On dira que X est *compact* s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ (*i.e.* tout U_i est ouvert et $X = \bigcup U_i$) on peut extraire un nombre fini d'ouverts U_i qui recouvrent encore X. On dira que X est *localement compact* si tout point $x \in X$ admet un voisinage compact.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue où X et Y sont des espaces topologiques séparés et A une partie de X alors :

- *si A est compacte, $f(A)$ est aussi compacte dans Y,*
- *si f est surjective et si A est dense, alors $f(A)$ est dense dans Y.*

Toute fonction continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace topologique compact X est bornée et atteint ses bornes inférieure et supérieure en des points de X *i.e.* il existe $x_0, x_1 \in X$ tels que

$$f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x) \text{ et } f(x_1) = \sup_{x\in X} f(x)$$

1.3. Définition. *On appelle* **métrique** *ou* **distance** *sur X toute application d de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$ satisfaisant aux propriétés suivantes*
i) $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie),
ii) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (séparation),
iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité du triangle).

Le couple (X, d) est appelé *espace métrique.*

1.4. Exemples

i) Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on pose

$$d(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|.$$

On vérifie sans peine que d ainsi définie constitue une distance sur $\mathbb{R}^n$.

ii) Soit X un ensemble ; si on définit δ par

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

on obtient de manière évidente une distance sur X. Elle est appelée *métrique discrète* sur X. La topologie qu'elle définit est celle de l'exemple 0. 1.2. ii).

iii) On considère l'espace $\mathcal{B}([0,1])$ des fonctions à valeurs réelles bornées sur l'intervalle $[0,1]$ (une fonction f est dite *bornée* s'il existe une constante positive M telle pour tout $x \in [0,1]$ on ait $|f(x)| \leq M$). Si $f, g \in \mathcal{B}([0,1])$ on pose

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

On définit ainsi sur l'espace $\mathcal{B}([0,1])$ une distance dite de la *convergence uniforme.* Elle est d'un intérêt incontestable en Analyse.

Nous aurons l'occasion de multiplier les exemples tout le long de ce cours.

Soit (X, d) un espace métrique. On appelle *boule ouverte* (respectivement *boule fermée*) de centre $x \in X$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ l'ensemble des $y \in X$ dont la distance à x est strictement inférieure (respectivement inférieure ou égale) à r. En général l'adhérence de la boule ouverte de centre x et de rayon r n'est pas la boule fermée de centre x et de rayon r (vérifier ce fait pour une métrique discrète). On dira que U est un *ouvert* de X si, pour tout point $x \in U$, il existe un nombre réel $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x,r)$ de centre x et de rayon r soit contenue dans U. On vérifie facilement que les ouverts de X forment une topologie sur X : c'est la topologie associée à la métrique d. En général une topologie sur un ensemble n'est pas définie par une métrique ; par exemple celle de l'exemple 0. 1.2. i).

On peut remarquer qu'un espace métrique (X, d) est toujours séparé ; en effet si $x, y \in X$ sont deux points distincts, leur distance η est > 0 ; les boules ouvertes $B(x, \frac{\eta}{3})$ et $B(y, \frac{\eta}{3})$ sont des voisinages respectifs de x et y sans point commun.

On dira qu'un espace métrique est *séparable* s'il contient une partie dénombrable dense.

Si deux métriques d_1 et d_2 définissent la même topologie sur X on dira qu'elles sont *équivalentes.* En particulier c'est le cas si d_1 et d_2 sont *quasi-isométriques i.e.* il existe une constante réelle $k \geq 1$ telle que

(O.1) $$\frac{1}{k} d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq k d_1(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dira que f est
- *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x,x' \in X \ : \ d(x,x') < \eta \Longrightarrow \delta(f(x),f(x')) < \varepsilon,$$

- *lipschitzienne de rapport* $k > 0$ si

(O.2) $$\forall x,y \in X \quad \delta(f(x),f(y)) \leq k d(x,y)$$

Si $k \in]0,1[$ on dira que f est *contractante.*

Bien sûr, une application lipschitzienne est uniformément continue et une application uniformément continue est continue. Mais les réciproques de ces assertions sont fausses en général ; toutefois lorsque X est compact alors si f est continue elle est uniformément continue ; mais f uniformément continue n'implique pas toujours f lipschitzienne que l'espace soit compact ou non (*cf.* exercice O. 3.4).

Deux métriques d_1 et d_2 sur X sont dites *uniformément équivalentes* si les applications

$$id_X : (X,d_1) \longrightarrow (X,d_2) \ \text{ et } \ id_X : (X,d_2) \longrightarrow (X,d_1)$$

sont uniformément continues.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. On dira que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* s'il existe $x \in X$ tel que

(O.3) $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \Longrightarrow d(x_n,x) < \varepsilon$$

Quand un tel point existe, il est unique ; on l'appelle *limite* de $(x_n)_n$. Autrement dit, quand n devient de plus en plus grand, l'élément x_n devient de plus en plus voisin de x. On dira que $(x_n)_n$ est de Cauchy si

(O.4) $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ n,p \geq N \Longrightarrow d(x_n,x_p) < \varepsilon.$$

Si d_1 et d_2 sont deux métriques équivalentes (resp. uniformément équivalentes) alors toute suite convergente (resp. de Cauchy) pour d_1 est convergente (resp. de Cauchy) pour d_2 et inversement.

Il est évident qu'une suite convergente est de Cauchy ; mais la réciproque est fausse comme en témoigne l'exemple qui suit : on pose $X =]0,+\infty[$ et $d(x,y) =$

$|x-y|$. Il est alors clair que la suite $x_n = \frac{1}{n}$ est de Cauchy mais non convergente dans X puisque $0 \notin X$. Il aurait fallu rajouter 0 à l'espace X ! On dira qu'un espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy dans X est convergente. Par exemple l'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle est un espace métrique complet ; il a été construit pour cela et toute l'Analyse repose pratiquement sur ce fait !

Une partie A d'un espace métrique (X, d) est dite *complète* si l'espace métrique (A, d) (on restreint la métrique d à la partie A) est complet. Toute partie complète de X est fermée. Mais une partie fermée n'est pas toujours complète sauf si X est lui-même complet. Un espace métrique compact est complet ; la réciproque est fausse.

Un exemple fondamental d'espace métrique complet est le suivant : soit X un espace métrique et notons $E = \mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées muni de la métrique

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

(On a déjà rencontré cette même distance en 1.4. iii) du chapitre préliminaire.) Il est bien connu que si (f_n) est une suite de Cauchy dans E alors (f_n) converge vers une fonction continue bornée f *i.e.* (E, d) est complet. Cet exemple important nous permet de construire de manière facile le complété $(\widehat{X}, \widehat{d})$ d'un espace métrique (X, d) de *diamètre fini.* (On appelle *diamètre* d'un espace métrique (X, d) le nombre fini ou infini $\delta(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y)$.)

1.5. Proposition. *Soit (X, d) un espace métrique de diamètre fini. Alors il existe un espace métrique complet $(\widehat{X}, \widehat{d})$ et une injection isométrique (i.e. une injection qui conserve les distances) $j : X \hookrightarrow \widehat{X}$ à image dense.*

En d'autres termes tout espace métrique peut être considéré comme partie dense d'un espace métrique complet. On dira que $(\widehat{X}, \widehat{d})$ est le *complété* de (X, d). Par exemple le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ muni de la métrique $d(x, y) = |x - y|$ n'est pas complet et son complété s'identifie de manière naturelle à $\mathbb{R}$ muni de la même distance d.

Idée de la démonstration. Soit $j : X \longrightarrow E$ l'application qui à tout $a \in X$ associe la fonction continue bornée f_a définie par $f_a(x) = d(x, a)$. On vérifie aisément que l'application j

- est injective,
- est une isométrie *i.e.* $d_\infty(f_a, f_b) = d(a, b)$.

Le complété de (X, d) s'identifie alors de manière naturelle à l'adhérence $\widehat{X} = \overline{j(X)}$ de l'image de j qui est un espace complet comme partie fermée d'un complet.

Si le diamètre de X n'est pas fini pour d, on remplace cette métrique par une autre qui lui est uniformément équivalente, par exemple $\inf(1, d)$ ou $\frac{d}{1+d}$ (exercice 0. 3.2). □

Supposons maintenant que A est une partie dense d'un espace métrique (X, d) et que $f : A \longrightarrow Y$ est une application uniformément continue définie sur A avec Y complet. *Alors f se prolonge en une application $\overline{f}$ uniformément continue de X dans Y.* La démonstration est la même que celle de la proposition VI. 1.4.

Nous terminerons par deux propriétés remarquables des espaces métriques complets et par l'énoncé du théorème d'Ascoli.

2. Quelques théorèmes

2.1. Théorème du point fixe. *Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow X$ une application contractante, i.e. il existe $k \in]0,1[$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$, pour tous $x, y \in X$. Supposons (X, d) complet. Alors f admet un et un seul point fixe, i.e. il existe $a \in X$ unique tel que $f(a) = a$.*

Démonstration. Soit $x \in E$ un point quelconque. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit

$$x_0 = x \quad \text{et} \quad x_n = f(x_{n-1}) \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq kd(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \dots \\ &\leq k^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Si n et p sont des entiers tels que $n \geq p \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_p) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{p+1}, x_p) \\ &\leq \left(k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^p\right) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Comme $k \in]0,1[$, $k^p \to 0$ quand $p \to +\infty$, donc (x_n) est une suite de Cauchy dans E qui est complet ; elle y converge donc vers un point a. On a

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = f(a)$$

i.e. a est un point fixe de f. Montrons qu'il est unique. Pour cela supposons qu'il en existe un autre b différent de a. On aura alors

$$\begin{aligned} d(a, b) &= d(f(a), f(b)) \\ &\leq kd(a, b). \end{aligned}$$

Comme $a \neq b$, $d(a, b) > 0$; d'où $k \geq 1$, ce qui contredit le fait que $k \in]0,1[$. L'unicité de a montre donc aussi qu'il est indépendant du choix du point x. □

Le théorème qui suit est une version plus générale du théorème 0. 2.1. et sa démonstration est laissée au lecteur.

2.2. Théorème. *Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que f^m (composée m fois de f) soit contractante, i.e. il existe $k \in]0,1[$ tel que $d(f^m(x), f^m(y)) \leq kd(x, y)$, pour tous $x, y \in X$. Alors f admet un et un seul point fixe, i.e. il existe $a \in X$ unique tel que $f(a) = a$.*

Ce théorème a beaucoup d'applications ; on l'utilisera pour montrer l'existence des solutions d'une équation différentielle dans le chapitre XI.

2.3. Théorème de Baire. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet. Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de parties fermées de* X *d'intérieur vide, alors la réunion* A *des* A_n *est aussi d'intérieur vide.*

Démonstration. Il faut montrer que A ne contient aucune boule. Soient $x \in A$ et $B = B_0$ une boule ouverte centrée en x. La partie A_1 étant d'intérieur vide l'ouvert $B \cap A_1^c$ (où E^c dénote le complémentaire dans X d'une partie E) contient l'adhérence d'une boule B_1 centrée en un point x_1 et de rayon ≤ 1. De même $B_1 \cap A_2^c$ contient l'adhérence d'une boule B_2 centrée en un point x_2 et de rayon $\leq \frac{1}{2}$. De cette manière on construit une suite de boules $B_n = B(x_n, r_n)$ avec $r_n \leq \frac{1}{2^n}$ et telles que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\overline{B}_n \subset B_{n-1} \cap A_n^c.$$

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ des centres de ces boules est une suite de Cauchy dans X. Elle converge donc vers un point $a \in X$ qui appartient à l'intersection des adhérences de toutes les boules B_n ; donc $a \in \cap_n A_n^c$ et par suite $a \notin \cup_n A_n$. Mais $a \in B$; donc $\cup_n A_n$ ne peut pas contenir B. Nous avons donc montré que quelle que soit la boule ouverte qu'on se donne, elle ne peut pas être contenue dans A. Autrement dit A n'a pas d'intérieur. □

Soient maintenant $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et (E, d) un espace métrique. On dira qu'une famille $\mathcal{F}$ d'applications de X dans E est *équicontinue au point* $x \in X$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x dans X tel que

$$y \in U \Longrightarrow \sup_{f\in\mathcal{F}} d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

On dira que $\mathcal{F}$ est *équicontinue*, si elle est équicontinue en tout point $x \in X$.

Notons $C(X, E)$ l'ensemble des applications continues de X dans E. Soient K un compact de X et U un ouvert de E. On pose

$$O(K, U) = \{f \in C(X, E) \big| f(K) \subset U\}$$

et on note $\mathcal{K}_0$ l'ensemble des $O(K, U)$ lorsque K décrit l'ensemble des compacts de X et U celui des ouverts de E. La topologie $\mathcal{K}$ engendrée par la famille $\mathcal{K}_0$ est appelée *topologie de la convergence compacte* sur $C(X, E)$; cela signifie qu'une suite (f_n) dans $C(X, E)$ converge vers $f \in C(X, E)$ au sens de $\mathcal{K}$ si, et seulement si, pour tout compact C de X, la suite obtenue en restreignant chaque f_n à C converge uniformément vers la restriction de f à ce compact. On a alors le résultat important suivant que nous énoncerons sans donner de démonstration (*cf.* [Sc2] par exemple).

2.4. Théorème d'Ascoli. *Soit* $\mathcal{F}$ *une partie de* $C(X, E)$. *Pour que* $\mathcal{F}$ *soit relativement compacte (i.e., son adhérence est compacte) pour la topologie* $\mathcal{K}$ *il suffit*

i) qu'elle soit équicontinue ;

ii) pour tout $x \in X$ *l'ensemble* $\{f(x) \big| f \in \mathcal{F}\}$ *soit relativement compact dans* E.

Si X *est localement compact, ces deux conditions sont aussi nécessaires.*

3. Exercices

3.1. On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé d'origine O. Pour deux points $M(x_1, x_2)$ et $N(y_1, y_2)$ quelconques de $\mathcal{P}$ on pose :

$$d(M,N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d'(M,N) = \begin{cases} d(M,O) + d(N,O) & \text{si } M \neq N \\ 0 & \text{si } M = N \end{cases}$$

i) Montrer que d et d' sont des distances sur $\mathcal{P}$.

ii) Montrer que l'espace métrique $(\mathcal{P}, d')$ est complet.

iii) Montrer que la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ avec $M_k = (1, \frac{1}{k})$ est convergente pour d et qu'elle ne l'est pas pour d'. Que peut-on conclure ?

3.2. Soit (X, d) un espace métrique. Pour $x, y \in X$ on pose $d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ et $d_2(x,y) = \inf(1, d(x,y))$.

Montrer que d_1 et d_2 sont deux distances uniformément équivalentes à d.

3.3. Soient $(X_n, d_n)_{n\geq 1}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. On suppose que $\forall n$, le diamètre de X_n est ≤ 1. Sur $X = \prod_n X_n$ on considère la topologie $\mathcal{T}$ engendrée par les parties de la forme $\prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ où Ω_i est un ouvert de X_i avec $\Omega_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indices i.

i) Montrer que pour cette topologie les projections $\pi_n : X \longrightarrow X_n$ sont continues et ouvertes.

ii) Montrer que $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine sur X rendant continues les applications π_n.

On définit une distance sur X en posant pour tous $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$

$$d(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

iii) Montrer que toute boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ dans X contient une partie de la forme $\prod_{i=1}^{N} B(x_i, \eta) \times \prod_{j\geq N+1} X_j$ où $x_i = \pi_i(x)$ et $B(x_i, \eta)$ est la boule de X_i de centre x_i et de rayon η avec $\eta < \varepsilon$.

iv) En déduire que la topologie associée à la métrique d coincide avec $\mathcal{T}$.

v) Montrer que pour qu'une application f d'un espace métrique (Y, δ) dans X soit continue il faut, et il suffit, que pour tout n, l'application $\pi_n \circ f : Y \longrightarrow X_n$ soit continue.

vi) Montrer que si, pour tout n, l'espace X_n est complet, il en est de même de l'espace X.

La topologie sur X associée à la métrique d est appelée *topologie produit* des topologies sur les X_n définies respectivement par les métriques d_n.

3.4. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ où n est un entier ≥ 2. Montrer que f est uniformément continue mais qu'elle n'est pas lipschitzienne.

CHAPITRE I
Espaces mesurables

Les espaces mesurables sont le terrain de jeu de l'intégrale de Lebesgue. Le but de ce chapitre est de les introduire et d'en donner quelques exemples. Nous définirons ensuite les applications mesurables qui sont des objets fondamentaux en théorie de la mesure : elles sont aux espaces mesurables ce que sont les applications continues aux espaces topologiques. Nous décrirons leurs propriétés plus particulièrement dans le cas où elles prennent des valeurs réelles (ou complexes).

1. Algèbres et semi-algèbres de Boole

Pour avoir une idée de la notion de mesure, nous allons regarder de manière assez vague (mais intuitive) un exemple concret. Considérons l'ensemble $\Omega = \mathbb{R}$ et essayons de voir à quel type de partie A de Ω on pourrait associer un nombre réel $\mu(A)$ qui serait censé représenter une *mesure* de A. Nous allons commencer par les parties les plus simples, c'est-à-dire les intervalles (ouverts, fermés ...). Convenons, pour simplifier le langage, de dire qu'une partie A est *mesurable* si on peut lui associer une "mesure". Cette appellation reste pour le moment assez vague car le fait qu'un ensemble soit mesurable ou non dépend de la manière dont on veut le mesurer.

Si $A = |a, b|$ est un intervalle borné (ouvert, semi-ouvert ou fermé) on pose, par définition

$$\mu(A) = b - a. \tag{I.1}$$

Autrement dit, la longueur de A peut être prise comme mesure de A. Si A est non borné, on prend $\mu(A) = +\infty$. Il découle de (I.1) que la mesure d'un point $A = \{a\} = [a, a]$ et celle de l'ensemble vide $\emptyset =]a, a[$ sont nulles.

i) Soient $A = |a, b|$ et $B = |c, d|$ deux intervalles. Alors il est clair que la mesure de $A \cup B$ n'est pas toujours égale à la somme des mesures respectives de A et B mais

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \tag{I.2}$$

qui implique en particulier que si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ et il est raisonnable d'exiger d'une "mesure" de vérifier une telle propriété. On peut donc mesurer les réunions finies d'intervalles.

ii) Comme on admet que l'ensemble Ω tout entier est mesurable, il est normal de demander que si A est mesurable, son complémentaire A^c doit être aussi mesurable et que sa mesure (demandons à celle de A d'être finie) est $\mu(\Omega) - \mu(A)$.

iii) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'intervalles, deux à deux disjoints. On pose

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

que la série converge ou non. On peut remarquer que si A et B sont des réunions dénombrables d'intervalles deux à deux disjoints alors $A \subset B$ implique $\mu(A) \leq \mu(B)$. Si donc $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'intervalles quelconques, la suite

$$\mu_N = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$

est croissante. On pose alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mu_N.$$

On peut donc mesurer les réunions dénombrables d'intervalles et par suite les intersections dénombrables d'intervalles puisque

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right)^c.$$

Mais on ne peut rien dire, d'une manière générale, de la mesure d'une réunion non dénombrable d'intervalles de $\mathbb{R}$.

A partir de cet exemple, on voit que les premiers objets qui interviennent en théorie de la mesure sont des parties d'un ensemble Ω astreintes à vérifier certaines propriétés. C'est ce que nous allons préciser dans ce chapitre. Dans toute la suite, Ω sera un ensemble non vide ; $\mathcal{P}(\Omega)$ désignera l'ensemble des parties de Ω. Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, A^c sera son complémentaire dans Ω.

1.1. Définition. *On appelle* **algèbre de Boole** *sur Ω toute partie $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes*

i) $\Omega \in \mathcal{A}_0$;

ii) $A \in \mathcal{A}_0 \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}_0$;

iii) $A, B \in \mathcal{A}_0 \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}_0$.

Il découle de cette définition que

iv) $\emptyset \in \mathcal{A}_0$;

v) $A, B \in \mathcal{A}_0 \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}_0$.

On peut donc remplacer dans la définition 1.1. la condition i) par iv) et la condition iii) par v).

1.2. Remarques

i) $\{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont des algèbres de Boole. Ce sont, respectivement, la plus petite et la plus grande algèbres de Boole (au sens de l'inclusion) qu'on puisse définir sur Ω.

ii) Si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'algèbres de Boole sur Ω, alors $\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une algèbre de Boole sur Ω.

iii) Si $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, il existe une plus petite algèbre de Boole $b(\mathcal{C})$ contenant $\mathcal{C}$; c'est l'intersection de toutes les algèbres de Boole sur Ω qui contiennent $\mathcal{C}$; on l'appelle *algèbre de Boole engendrée* par $\mathcal{C}$.

Considérons la famille $\mathcal{S}$ de tous les intervalles (ouverts, semi-ouverts ou fermés de $\mathbb{R}$). On constate que

i) $\emptyset =]0, 0[$ et $\mathbb{R}$ sont dans $\mathcal{S}$,

ii) si $A, B \in \mathcal{S}$ alors $A \cap B \in \mathcal{S}$,

iii) $A \in \mathcal{S}$ n'implique pas en général $A^c \in \mathcal{S}$ mais seulement A^c est réunion de deux intervalles disjoints.

Ceci nous amène à la

1.3. Définition. *On dira qu'une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une* **semi-algèbre de Boole** *sur Ω si*

i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{S}$;

ii) $A, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$;

iii) $A \in \mathcal{S} \Longrightarrow A^c$ est réunion finie de parties de Ω dans $\mathcal{S}$, deux à deux disjointes.

2. Motivation probabiliste

Nous allons expliquer comment les algèbres de Boole interviennent en théorie des probabilités et à quel point s'arrête leur efficacité. Nous nous contenterons de le faire sur des exemples.

2.1. La notion d'épreuve aléatoire

Une *épreuve aléatoire* est une expérience dont les résultats sont liés au hasard et ne peuvent être prévus avec certitude à l'avance. Les exemples expliquent mieux cette notion.

i) On prend une pièce de monnaie et on suppose que si on la jette, alors le résultat donne soit *pile*, soit *face* et rien d'autre. Les résultats possibles peuvent donc être décrits par l'ensemble à deux éléments

$$\Omega = \{\pi, f\}.$$

Chaque partie de Ω représente un *événement* ; par exemple

- "avoir pile" $= \{\pi\}$;
- "avoir pile ou face" $= \{\pi, f\} = \Omega$;
- "ne pas avoir pile et ne pas avoir face" $= \emptyset$.

ii) On jette la même pièce de monnaie deux fois. Dans ce cas on a

$$\Omega = \{\pi\pi, \pi f, f\pi, ff\}.$$

On peut considérer les événements

- $A =$"avoir au moins une fois pile" $= \{\pi\pi, \pi f, f\pi\}$;
- $B =$"avoir au moins une fois face" $= \{ff, f\pi, \pi f\}$;
- $C =$"avoir exactement une fois pile et une fois face" $= \{\pi f, f\pi\} = A \cap B$.

L'événement $A \cup B$ signifie que l'un au moins des événements A ou B se réalise ; $A \cap B$ signifie que A et B se réalisent simultanément. L'événement $\emptyset$ est l'*événement impossible* : il ne se réalise jamais ; par contre Ω est l'*événement certain* : il se réalise

toujours. Si A est un événement, A^c est l'événement contraire : A^c se réalise si, et seulement si, A ne se réalise pas. On voit donc la nécessité des axiomes imposés dans la définition d'une algèbre de Boole. Mais, malheureusement, ces axiomes sont insuffisants pour décrire tous les événements dans certaines épreuves aléatoires comme on peut le voir dans l'exemple du

2.2. Jet infini d'une pièce

On jette une infinité dénombrable de fois une pièce de monnaie (on suppose évidemment que cela est possible) et on s'intéresse aux résultats possibles de cette épreuve. Ils sont du type

$$(\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n, \dots)$$

où pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, ω_i est égal soit à π soit à f. L'ensemble Ω est donc assez grand. Considérons l'événement $A =$"on a pile pour la première fois au bout d'un nombre pair de jets". Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, soit A_p l'évenement

$$A_p = \Big\{ (\underbrace{f, \dots, f}_{2p-1 \text{ fois}}, \pi, \omega_i, \omega_{i+1}, \dots) \Big\}$$

où $w_i \in \{\pi, f\}$ pour $i \geq 2p+1$. Alors l'événement A n'est rien d'autre que la réunion de tous les A_p pour $p \in \mathbb{N}^*$ *i.e.*

$$A = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} A_p.$$

La notion d'algèbre de Boole ne permet donc pas de décrire une telle épreuve aléatoire. Il faut remplacer l'axiome iii).

3. La notion de tribu

3.1. Définition. *On appelle* **tribu** *sur Ω toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes*

i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

iii) si $(A_n)_{n \geq 1}$ *est une suite dans* $\mathcal{A}$, *alors la réunion*

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

est encore dans $\mathcal{A}$.

Bien entendu, une tribu est une algèbre de Boole. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesurable.*

3.2. Exemples de tribus

i) De manière évidente $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω ; c'est la plus grande (au sens de l'inclusion) et elle est trop grosse quand Ω n'est ni fini, ni dénombrable. De même $\{\emptyset, \Omega\}$ est la plus petite tribu sur Ω ; et elle n'est pas d'un grand intérêt.

ii) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $=\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

iii) Une intersection quelconque de tribus sur Ω est encore une tribu. Si $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, alors l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$ (il y en a au moins une qui est $\mathcal{P}(\Omega)$) est appelée *tribu engendrée* par $\mathcal{C}$ et sera notée $\sigma(\mathcal{C})$.

3.3. Tribu borélienne

Supposons que Ω soit un espace topologique et notons $\mathcal{T}$ l'ensemble de ses ouverts. La tribu $\sigma(\mathcal{T})$ engendrée par $\mathcal{T}$ est appelée *tribu borélienne* de Ω. On la note $\mathcal{B}_\Omega$. Elle est aussi engendrée par les fermés de Ω. Par exemple, pour $\mathbb{R}^n$, on peut vérifier que $\mathcal{B}_\Omega$ est engendrée par l'une quelconque des familles suivantes :

- les produits d'intervalles ouverts ou fermés de $\mathbb{R}$;
- les boules ouvertes ou fermées de $\mathbb{R}^n$;
- les produits d'intervalles ouverts, semi-ouverts ou fermés de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont rationnelles ;
- les boules ouvertes ou fermées de $\mathbb{R}^n$ de rayon rationnel et centrées sur les points rationnels.

3.4. Produit d'espaces mesurables

On considère des espaces msurables $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, on note Ω le produit cartésien $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ et $\mathcal{S}$ la classe des parties de la forme

$$A_1 \times \ldots \times A_n$$

où $A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$. La tribu $\mathcal{A}$ sur Ω engendrée par $\mathcal{S}$ est appelée *tribu produit* (ou *produit tensoriel*) de $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$. On la notera $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$. On a, par exemple, si les Ω_i sont des espaces métriques et Ω muni de la topologie produit $\mathcal{B}_\Omega = \mathcal{B}_{\Omega_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_{\Omega_n}$. En particulier $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$ (produit tensoriel n fois).

La tribu borélienne $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ (de $\mathbb{R}^n$ de façon générale) est immense à tel point qu'il n'est pas du tout évident de trouver une partie de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas dans $\mathcal{B}_\mathbb{R}$; les méthodes connues à l'heure actuelle pour avoir un tel objet (un exemple est donné au paragraphe 3 du chapitre II) ont recours à *l'axiome du choix* (*cf.* Appendice).

4. Applications mesurables

Comme nous l'avons signalé au début de ce chapitre, une *application mesurable* est en théorie de la mesure ce qu'est une application continue en topologie. Pour les espaces mesurables dont la tribu est associée à une topologie, la mesurabilité est une notion plus générale que celle de continuité. Dans cette section, nous définirons la notion d'application mesurable et donnerons (dans la section 5) les principales propriétés de celles qui sont à valeurs réelles ; elles seront pratiquement les seules à intervenir tout le long de ce cours.

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables et $f : \Omega \longrightarrow E$ une application.

4.1. Définition. *On dira que f est* **mesurable** *si pour tout $B \in \mathcal{B}$, l'ensemble $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Evidemment si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans E est mesurable.

4.2. Théorème. *Soient Ω un ensemble, $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : \Omega \longrightarrow E$ une application. On pose $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{B})$. Alors*

i) $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω,
ii) si $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$, on a $\mathcal{A} = \sigma\left[f^{-1}(\mathcal{C})\right]$.

Démonstration. i) On a clairement $\Omega = f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. D'autre part si $B \in \mathcal{B}$ alors

$$\left[f^{-1}(B)\right]^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}.$$

Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{B}$; alors

$$\bigcup_{n\geq 1} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) \in \mathcal{A}.$$

Ce qui montre que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.

ii) On a bien sûr $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$; et comme $\mathcal{A}$ est une tribu on a $\sigma\left[f^{-1}(\mathcal{C})\right] \subset \mathcal{A}$. Pour démontrer l'inclusion inverse, considérons la sous-tribu de $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}' = \left\{B \in \mathcal{B} \;:\; f^{-1}(B) \in \sigma\left[f^{-1}(\mathcal{C})\right]\right\}.$$

Cette sous-tribu contient $\mathcal{C}$, donc elle contient $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$; par suite elle est égale à $\mathcal{B}$. Ce qui montre que $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \sigma\left[f^{-1}(\mathcal{C})\right]$. □

On dira que $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{B})$ est la *tribu engendrée* par $f : \Omega \longrightarrow (E, \mathcal{B})$. C'est la plus petite tribu sur Ω pour laquelle f est mesurable. De la même manière si $f_i : \Omega \longrightarrow (E_i, \mathcal{B}_i)$ est une famille d'applications, alors la plus petite tribu sur Ω qui rend mesurables toutes les f_i est par définition la *tribu engendrée* par la famille $(f_i)_{i\in I}$.

Si $f : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (E, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$, alors f est mesurable si, et seulement si, $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

Du théorème I.4.2 on déduit immédiatement le

4.3. Corollaire. *Soit $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ une application continue entre deux espaces topologiques Ω_1 et Ω_2. Alors f est mesurable (pour les tribus boréliennes associées aux topologies respectives sur Ω_1 et Ω_2).*

Le théorème qui suit (de démonstration immédiate) est important car il permet de définir la *catégorie des espaces mesurables* : les *objets* sont les ensembles munis d'une tribu et les *flèches*, les applications mesurables entre ces ensembles.

4.4. Théorème *Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ et $(\Omega_3, \mathcal{A}_3)$ trois espaces mesurables et considérons des applications mesurables $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ et $g : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_3$. Alors la composée $g \circ f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_3$ est mesurable.*

5. Applications mesurables réelles

Lorsqu'on parlera d'application (ou de fonction) mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$, on supposera toujours que $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne canonique $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Dans ce cas, en vertu du théorème I.4.2 et du fait que la classe des parties de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, x]$ (avec $x \in \mathbb{R}$) engendre $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on peut caractériser la mesurabilité à l'aide du

5.1. Théorème. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors f est mesurable si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'ensemble*

$$f^{-1}(]-\infty, x]) = \{f \leq x\} = \{\omega \in \Omega \ : \ f(\omega) \leq x\}$$

appartient à $\mathcal{A}$.

5.2. Notations

Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose

$$(f+g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega) \quad \text{et} \quad (fg)(\omega) = f(\omega)g(\omega)$$

$$(\inf(f,g))\,(\omega) = \inf(f(\omega), g(\omega))$$

et

$$(\sup(f,g))\,(\omega) = \sup(f(\omega), g(\omega))$$

$$f^+ = \sup(f, 0) \quad \text{et} \quad f^- = \sup(-f, 0).$$

On vérifie facilement que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions réelles définies sur Ω, on pose pour tout $\omega \in \Omega$

$$\left(\sup_{n\geq 1} f_n\right)(\omega) = \sup_{n\geq 1}(f_n(\omega))$$

et

$$\left(\inf_{n\geq 1} f_n\right)(\omega) = \inf_{n\geq 1}(f_n(\omega))$$

$$(\limsup f_n)\,(\omega) = \limsup(f_n(\omega)) = \inf_{N\geq 1}\left[\sup_{n\geq N} f_n(\omega)\right]$$

et

$$(\liminf f_n)\,(\omega) = \liminf(f_n(\omega)) = \sup_{N\geq 1}\left[\inf_{n\geq N} f_n(\omega)\right].$$

Soit A une partie de Ω. On appelle *fonction indicatrice* de A, la fonction 1_A définie par

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que 1_A est mesurable si, et seulement si, $A \in \mathcal{A}$.

On dira qu'une fonction mesurable $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est *étagée*, s'il existe une partition finie $(A_1, \ldots, A_k)$ de Ω avec $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ et des nombres $a_i \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i}.$$

Le lecteur pourra remarquer que la partition $A_1, \ldots, A_k$ n'est pas unique.

On notera

i) $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables sur Ω,

$$\mathcal{M}_+ = \{f \in \mathcal{M} \ : \ f \geq 0\},$$

ii) $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions réelles étagées sur Ω et

$$\mathcal{E}_+ = \{\varphi \in \mathcal{E} \ : \ \varphi \geq 0\}.$$

On a bien sûr

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_+ \subset M_+.$$

5.3. Théorème. *i) L'ensemble $\mathcal{M}$ muni de l'addition et de la multiplication est une algèbre unitaire.*

ii) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{M}$; alors $\sup f_n$*,* $\inf f_n$*,* $\limsup f_n$ *et* $\liminf f_n$ *(qu'on suppose exister pour tout ω) sont dans $\mathcal{M}$. Si f_n converge simplement vers f, alors f est mesurable.*

Il découle de ce théorème que si $f, g \in \mathcal{M}$ alors $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$, f^+, f^- et $|f|$ appartiennent à $\mathcal{M}$.

Démonstration. i) Soient $f, g \in \mathcal{M}$. La fonction

$$(f, g) : \omega \in \Omega \longmapsto (f(\omega), g(\omega)) \in \mathbb{R}^2$$

(où $\mathbb{R}^2$ est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$) est mesurable ; ceci découle du fait que les pavés $[a, b] \times [c, d]$ engendrent $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ et que

$$(f, g)^{-1}([a, b] \times [c, d]) = f^{-1}([a, b]) \cap g^{-1}([c, d]).$$

Comme la fonction $\phi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \phi(x, y) = x+y \in \mathbb{R}$ est continue, la composée

$$\omega \in \Omega \overset{(f,g)}{\longrightarrow} (f(\omega), g(\omega)) \in \mathbb{R}^2 \overset{\phi}{\longrightarrow} f(\omega) + g(\omega) \in \mathbb{R}$$

est mesurable. La mesurabilité de fg se démontre de manière similaire en considérant la fonction $\psi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow xy \in \mathbb{R}$ à la place de ϕ. Le cas particulier $f = \lambda =$ constante réelle donne finalement la structure d'espace vectoriel réel sur $\mathcal{M}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ est donc une algèbre ; elle est unitaire puisqu'elle contient la fonction $\mathbf{1}$.

ii) Pour démontrer ce point, on va utiliser la caractérisation de la mesurabilité donnée par le théorème I. 5.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$A = \left\{\sup_{n\geq 1} f_n \leq x\right\} = \bigcap_{n\geq 1} \{f_n \leq x\}$$

et

$$B = \left\{ \inf_{n\geq 1} f_n \leq x \right\} = \bigcup_{n\geq 1} \{f_n \leq x\}.$$

Comme pour tout $n \geq 1$, f_n est mesurable, $\{f_n \leq x\} \in \mathcal{A}$, donc $A, B \in \mathcal{A}$. Ceci montre que les fonctions $\sup f_n$ et $\inf f_n$ sont mesurables. Pour montrer que $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont mesurables, il suffit d'appliquer ce qui précède aux suites $\varphi_N = \sup_{n\geq N} f_n$ et $\psi_N = \inf_{n\geq N} f_n$.

Si f est la limite simple de f_n, alors $f = \limsup f_n = \liminf f_n$ qui montre bien que f est mesurable. □

Le théorème suivant permet d'approcher n'importe quelle fonction de $\mathcal{M}$ par une fonction étagée. Il sert à définir l'intégrale.

5.4. Théorème. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors f est limite simple d'une suite de fonctions étagées sur Ω.*

Démonstration. i) Nous supposerons pour commencer que f est positive et bornée. Soit $M > 0$ tel que $\sup_{\omega\in\Omega} f(\omega) \leq M$. On pose $g_1 = \frac{M}{2} 1_{\{f > \frac{M}{2}\}}$. Alors g_1 est étagée et on a, de manière évidente

$$0 \leq g_1 \leq f \quad \text{et} \quad \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega) - g_1(\omega)| \leq \frac{M}{2}.$$

La fonction $f_1 = f - g_1$ est mesurable, positive et bornée par $\frac{M}{2}$. La fonction $g_2 = \frac{M}{2^2} 1_{\{f > \frac{M}{2^2}\}}$ est étagée et vérifie

$$0 \leq g_2 \leq f_1 \quad \text{et} \quad \sup_{\omega\in\Omega} |f_1(\omega) - g_2(\omega)| \leq \frac{M}{2^2}.$$

De cette manière on construit une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions étagées positives telles que

$$0 \leq g_n \leq f - (g_1 + \ldots + g_{n-1})$$

et

$$\sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega) - (g_1(\omega) + \ldots + g_n(\omega))| \leq \frac{M}{2^n}.$$

La fonction $\varphi_n = g_1 + \ldots + g_n$ est alors positive et la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est croissante et tend uniformément (et donc a fortiori simplement) vers f.

ii) Supposons $f \geq 0$ mais non forcément bornée. On définit la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\psi_n(\omega) = \inf(f(\omega), n).$$

Alors (ψ_n) est une suite croissante de fonctions bornées, qui tend simplement vers f. D'après i), pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\zeta_n \in \mathcal{E}_+$ telle que $0 \leq \zeta_n \leq \psi_n$ et $\sup_{\omega\in\Omega} |\psi_n(\omega) - \zeta_n(\omega)| \leq \frac{1}{n}$. Pour tout n la fonction $g_n = \sup(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ est étagée positive et la suite (g_n) tend simplement en croissant vers f.

iii) On suppose maintenant que f n'est pas forcément positive. Alors on sait (*cf.* I. 5.2) que $f = f^+ - f^-$ où f^+ et f^- sont positives. D'après ii) il existe des suites (g_n^+) et (g_n^-) de fonctions étagées positives qui tendent en croissant respectivement vers f^+ et f^-. Alors $g_n = g_n^+ - g_n^-$ est une suite de fonctions étagées qui tend simplement vers f. □

6. Exercices

6.1. Soient Ω un ensemble non vide et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω.

Démontrer les formules $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ et $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ dites *formules de Morgan.*

6.2. Soient Ω un ensemble non vide et $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.

i) Montrer que la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$ coincide avec la tribu $\sigma(b(\mathcal{C}))$ engendrée par l'algèbre de Boole $b(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$.

On dira que $\mathcal{C}$ est une *classe monotone* si pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{C}$, $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{C}$ et pour toute suite décroissante $(B_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{C}$, $\bigcap_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{C}$.

ii) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole sur Ω. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu si, et seulement si, $\mathcal{A}$ est une classe monotone.

6.3. Soit $\mathcal{S}$ la famille des parties de $\mathbb{R}^n$ de la forme $I_1 \times \ldots \times I_n$ où $I_1, \ldots, I_n$ sont des intervalles (ouverts, fermés ou semi-ouverts) de $\mathbb{R}$.

Montrer que $\mathcal{S}$ est une semi-algèbre de Boole sur $\mathbb{R}^n$ (commencer par étudier le cas $n = 2$. Il est conseillé de faire un dessin ; il dit toujours plus que mille mots !).

6.4. Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables. Sur $\Omega = \prod_{i\in I} \Omega_i$ on considère la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par les parties de la forme $\prod_{i\in I} A_i$ où $A_i = \Omega_i$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I$.

i) Montrer que pour cette tribu les projections $\pi_i : \Omega \longrightarrow \Omega_i$ sont mesurables.

ii) Montrer que $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu sur Ω pour laquelle les applications π_i sont mesurables.

iii) Montrer que pour qu'une application f d'un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ dans $(\Omega, \mathcal{A})$ soit mesurable il faut, et il suffit, que pour tout $i \in I$ l'application $\pi_i \circ f : E \longrightarrow \Omega_i$ soit mesurable.

La tribu $\mathcal{A}$ sur Ω est appelée la *tribu produit* des tribus $\mathcal{A}_i$.

6.5. Soient E un espace métrique et $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne. On munit $E \times E$ de la tribu produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$.

i) Montrer que la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in E\}$ appartient à la tribu produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$.

ii) Montrer que si f et g sont deux applications mesurables d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ dans E, alors l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = g(w)\}$ appartient à $\mathcal{A}$.

6.6. Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et (f_n) une suite de fonctions mesurables réelles sur Ω.

Montrer que l'ensemble des éléments $\omega \in \Omega$ tels que $f_n(\omega)$ converge dans $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{A}$.

CHAPITRE II
Espaces mesurés

Nous avons introduit, dans le Chapitre I, tous les ingrédients nécessaires pour aborder la théorie de la mesure proprement dite. Nous allons définir, de manière précise, la notion de mesure sur une algèbre de Boole et sur une tribu. Nous démontrerons le théorème de prolongement qui permet d'étendre une mesure, définie a priori sur une semi-algèbre de Boole, à la tribu qu'elle engendre. Nous l'appliquerons ensuite à la construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Définitions et exemples

Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(\Omega)$.

1.1. Définition. *On appelle* **fonction d'ensemble** *sur $\mathcal{A}$ toute application μ sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que μ est*

i) additive si, pour toute famille finie $(A_n)_{n=1,\dots,k}$ dans $\mathcal{A}$ telle que la réunion des A_n soit encore dans $\mathcal{A}$ et $n \neq p \Longrightarrow A_n \cap A_p = \emptyset$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n), \tag{II.1}$$

ii) σ-additive, si pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints telle que la réunion des A_n soit encore dans $\mathcal{A}$ (condition automatiquement satisfaite si $\mathcal{A}$ est une tribu) et $\sum_{\mu(A_n)<0} \mu(A_n)$ converge, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{II.2}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

1.2. Définition. *On appelle* **mesure** *sur $\mathcal{A}$ toute fonction d'ensemble sur $\mathcal{A}$, positive, σ-additive et non constante avec la valeur $+\infty$.*

Pour $A \in \mathcal{A}$, le nombre $\mu(A)$ s'appelle *mesure de A*. Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et μ une mesure sur Ω s'appelle *espace mesuré.*

L'addition et la multiplication des réels est prolongée à tout $\overline{\mathbb{R}}_+$ de la façon suivante : soit $a \in \mathbb{R}_+$; alors on convient que

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \qquad a + (+\infty) = +\infty \qquad 0 \times +\infty = 0$$

$$+\infty \times (+\infty) = +\infty \qquad +a \times (+\infty) = +\infty \ \text{ avec } a > 0.$$

Les expressions (II.1) et (II.2) auront donc toujours un sens que les $\mu(A_n)$ soient finis ou non.

Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. On dira que μ est

i) *finie* si, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < +\infty$. Comme pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ implique $\mu(A) \leq \mu(B)$, μ est finie si, et seulement si, $\mu(\Omega) < +\infty$;

ii) *σ-finie* si $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ avec $A_n \in \mathcal{A}$ et $\mu(A_n) < +\infty$;

iii) une *probabilité* sur Ω si $\mu(\Omega) = 1$.

1.3. Conséquences

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors

i) $\mu(\emptyset) = 0$; en effet comme μ n'est pas constante avec la valeur $+\infty$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments deux à deux disjoints dans $\mathcal{A}$ définie par

$$A_1 = A \quad \text{et} \quad A_n = \emptyset \quad \text{pour } n \geq 2\ .$$

La réunion des A_n est égale à A et la σ-additivité de μ donne

$$\mu(A) = \mu(A) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ceci implique que la série $\sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n)$ converge et est égale à 0. Comme tous ses termes sont égaux à $\mu(\emptyset)$ on en déduit que $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) μ est additive. En effet soit $(A_n)_{n=1,\dots,k}$ une famille finie dans $\mathcal{A}$ telle que la réunion des A_n soit encore dans $\mathcal{A}$ et $n \neq p \Longrightarrow A_n \cap A_p = \emptyset$; on pose

$$A'_n = \begin{cases} A_n & \text{si } 1 \leq n \leq k \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors A'_n est une suite de parties dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjointes et telles que

$$\bigcup_{n \geq 1} A'_n = \bigcup_{n=1}^{k} A_n.$$

Comme μ est σ-additive on a

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A'_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A'_n) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$$

qui montre bien que μ est additive.

1.4. Exemples de mesures

i) Supposons Ω fini de cardinal n et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on note $|A|$ le cardinal de A. On pose

$$\mu(A) = \frac{|A|}{n}.$$

On obtient ainsi une mesure (une probabilté en fait) sur Ω.

ii) Supposons $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ et posons pour tout $A \subset \mathbb{N}^*$

$$\mu(A) = \sum_{a \in A} \frac{1}{2^a}.$$

Alors μ est une probabilité sur Ω.

iii) Supposons Ω quelconque et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour $A \in \mathcal{A}$ posons

$$m(A) = \begin{cases} |A| & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il est facile de voir que m ainsi définie est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée *mesure de comptage.* Elle est σ-finie si, et seulement si, Ω est dénombrable (exercice II. 5.1).

iv) Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et ω un point de Ω. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on pose

$$\delta_\omega(A) = 1_A(\omega)$$

où 1_A est la fonction indicatrice de A. Il est facile de voir que l'application δ_ω ainsi définie est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$; on l'appelle *mesure de Dirac* au point ω.

On appelle *mesure discrète* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute combinaison linéaire dénombrable

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{\omega_i}$$

de mesures de Dirac δ_{ω_i} où les p_i sont des nombres réels positifs ou nuls.

L'introduction de mesures intéressantes sur les ensembles non dénombrables nécessite un peu plus de matériel. Nous verrons comment arranger cela dans la suite.

2. Propriétés des mesures

Fixons quelques notations. Soit Ω un ensemble. Si A et B sont des parties de Ω alors $B - A$ sera l'intersection de B avec le complémentaire de A. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments dans $\mathcal{A}$. La suite (A_n) est dite *croissante* (resp. *décroissante*) si $A_n \subset A_{n+1}$ (resp. $A_{n+1} \subset A_n$) pour tout $n \geq 1$. On dira que la suite (A_n) *tend en croissant* (resp. *tend en décroissant*) vers A si elle est croissante (resp. décroissante) et si

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \left(\text{resp. } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Dans ce cas on note

$$A_n \uparrow A \qquad (\text{resp. } A_n \downarrow A).$$

On appelle *limite supérieure* et *limite inférieure* de (A_n) les parties de Ω définies respectivement par

$$\text{(II.3)} \qquad \limsup A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \right) \quad \text{et} \quad \liminf A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n \right)$$

On dira que (A_n) est convergente si $\limsup A_n = \liminf A_n$.

2.1. Proposition. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

i) Si $A, B \in \mathcal{A}$ sont tels que $A \subset B$ et $\mu(B) < +\infty$, alors $\mu(B-A) = \mu(B)-\mu(A)$.

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments dans $\mathcal{A}$.

ii) Si (A_n) tend en croissant vers $A \in \mathcal{A}$, alors $\mu(A_n)$ tend en croissant vers $\mu(A)$.

iii) Si $A_n \downarrow A \in \mathcal{A}$ et s'il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, alors $\mu(A_n)$ tend en décroissant vers $\mu(A)$.

iv) On a toujours

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

v) On a $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$ et s'il existe n_0 tel que

$$\mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n\right) < +\infty,$$

alors $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$. *En particulier si μ est une probabilité, on a*

$$A_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A \Longrightarrow \mu(A_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu(A).$$

vi) On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty \Longrightarrow \mu(\limsup A_n) = 0.$$

Démonstration. i) A et $B - A$ sont disjointes et telles que $B = A \cup (B - A)$. D'où $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$. Comme $\mu(A) \leq \mu(B) < +\infty$ on a

$$\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A).$$

ii) Les parties $A_1, A_2 - A_1, \ldots, A_n - A_{n-1}, \ldots$ sont disjointes deux à deux et ont pour réunion A. La σ-additivité de μ donne

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n - A_{n-1}) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left(\mu(A_1) + \sum_{n=2}^{N} \mu(A_n - A_{n-1}) \right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mu\left(A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{N} (A_n - A_{n-1}) \right).
\end{aligned}$$

Comme la suite

$$\alpha_N = \mu\left(A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{N}(A_n - A_{n-1})\right)$$

est croissante et est égale à la suite $\mu(A_N)$ on a

$$\mu(A_N) \uparrow \mu(A).$$

iii) On peut écrire

$$A = A_{n_0} - \bigcup_{n=n_0}^{\infty}(A_{n_0} - A_n).$$

Ce qui donne, d'après i),

$$\mu(A) = \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty}(A_{n_0} - A_n)\right).$$

On applique ii) à la suite croissante $(A_{n_0} - A_n)_{n \geq n_0}$ et on obtient

$$\mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty}(A_{n_0} - A_n)\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_{n_0} - A_n).$$

D'où

$$\mu(A) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n \to +\infty}\{\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)\} = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n).$$

iv) Les parties $A_1, A_2 - A_1, \ldots, \left(A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right), \ldots$ sont disjointes et leur réunion est égale à celle des A_n. D'où

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu\left(A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$
$$\leq \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

v) On rappelle que la suite

$$\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$$

est croissante et telle que

$$\liminf A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n.$$

D'après ii) on a

$$\begin{aligned}\mu(\liminf A_n) &= \lim_N \mu\left(\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n\right) \\ &= \liminf \mu\left(\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n\right) \\ &\leq \liminf \mu(A_N)\end{aligned}$$

puisque $\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n \subset A_N$.

La suite

$$B_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$$

est décroissante et tend vers $\limsup A_n$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$; alors pour tout $n \geq N$, $A_n \subset B_N$; donc $\mu(A_n) \leq \mu(B_N)$ et par suite

$$\sup_{n\geq N} \mu(A_n) \leq \mu(B_N).$$

D'après iii) on a

$$\limsup \mu(A_n) = \inf_N \sup_{n\geq N} \mu(A_n) \leq \lim_N \mu(B_N) = \mu(\limsup A_n).$$

Ce qui démontre ce qu'on cherche.

Si μ est une probabilité toutes les parties de Ω sont de mesure finie (puisque $\mu(\Omega) = 1$). On aura donc

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n) \leq \limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n).$$

Si (A_n) converge vers A, on a $\limsup A_n = \liminf A_n$. Ce qui montre bien que

$$A_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A \Longrightarrow \mu(A_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu(A).$$

vi) La suite

$$\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$$

est décroissante et tend vers $\limsup A_n$. D'autre part, comme par hypothèse

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$$

le point iii) nous donne

$$\begin{aligned}\mu(\limsup A_n) &= \lim_{N\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \\ &\leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n) = 0.\end{aligned}$$

3. Le théorème de prolongement

Comme nous l'avons déjà signalé la construction d'une mesure intéressante sur un ensemble non dénombrable ne se "voit de manière explicite" que sur certains éléments (qui forment souvent une algèbre de Boole ou une semi-algèbre de Boole) de la tribu. C'est sur ces parties que l'on construit d'abord une telle mesure ; le *théorème de prolongement* permet de l'étendre ensuite à toute la tribu. La démonstration de ce théorème découle de plusieurs lemmes que nous allons établir.

3.1. Définition. *Une* **mesure extérieure** *sur Ω est une application $\phi : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que*
i) $\phi(\emptyset) = 0$,
ii) si $A \subset B$ alors $\phi(A) \leq \phi(B)$,
iii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{P}(\Omega)$,

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Une partie A de Ω est dite *ϕ-mesurable* si, pour toute partie E de Ω, on a

$$\phi(E) = \phi(A \cap E) + \phi(A^c \cap E). \tag{II.4}$$

Soit μ une mesure sur une algèbre de Boole $\mathcal{A}_0$ de parties de Ω : μ est une fonction d'ensemble sur $\mathcal{A}_0$, positive, σ-additive et non constante avec la valeur $+\infty$. Nous allons définir de manière naturelle une mesure extérieure μ^* sur Ω en utilisant μ. Soient $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathcal{S}_A$ l'ensemble de toutes les suites $S = (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{A}_0$ telles que $A \subset \cup_n A_n$. Posons

$$\mu^*(A) = \inf_{S\in\mathcal{S}_A} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\right\}. \tag{II.5}$$

3.2. Lemme. *Supposons μ bornée. Alors la fonction d'ensemble $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure extérieure bornée sur Ω qui coïncide avec μ sur $\mathcal{A}_0$.*

Démonstration. i) Soit $A \in \mathcal{A}_0$; on a de manière évidente $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Soit $S = (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}_A$; alors

$$\mu(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(A_n),$$

donc

$$\mu(A) \leq \inf_{S\in\mathcal{S}_A} \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mu(A_n)\right\}$$

i.e. $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Par suite $\mu(A) = \mu^*(A)$.

ii) Nous allons maintenant établir que μ^* est une mesure extérieure sur Ω ; elle est bornée car μ l'est. Les propriétés i) et ii) de la définition II. 3.1. sont évidentes. Démontrons iii). Soit A une partie de Ω telle que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$$

avec A_n partie de Ω non forcément dans $\mathcal{A}_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(A_{nk})_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{A}_0$ telle que

$$A_n \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_{nk} \quad \text{et} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Mais

$$A \subset \bigcup_{n,k \in \mathbb{N}^*} A_{nk}$$

d'où

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n,k \in \mathbb{N}^*} \mu(A_{nk}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit par passage à la limite (quand $\varepsilon \to 0$) :

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu^*(A_n).$$

Ce qui termine la démonstration du lemme. □

Notons $\mathcal{B}$ la classe des parties de Ω qui sont μ^*-mesurables *i.e.* les parties A qui vérifient

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$$

pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$.

3.3. Lemme. *$\mathcal{B}$ est une tribu sur Ω et μ^* est une mesure bornée sur cette tribu.*

Démonstration. i) $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole sur Ω. On a clairement pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu^*(E) = \mu^*(\Omega \cap E) + \mu^*(\Omega^c \cap E)$$

donc $\Omega \in \mathcal{B}$. Soient $A, B \in \mathcal{B}$ et $E \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \\
&= \mu^*(A \cap B \cap E) + \mu^*(A \cap B^c \cap E) \\
&\quad + \mu^*(A^c \cap B \cap E) + \mu^*(A^c \cap B^c \cap E) \\
&\geq \mu^*(A \cap B \cap E) \\
&\quad + \mu^* \{(A \cap B^c \cap E) \cup (A^c \cap B \cap E) \cup (A^c \cap B^c \cap E)\} \\
&\geq \mu^*(A \cap B \cap E) + \mu^* \{(A \cap B)^c \cap E\}.
\end{aligned}$$

Comme $E = \{(A \cap B) \cap E\} \cup \{(A \cap B)^c \cap E\}$ et que μ^* est une mesure extérieure, le point iii) de la définition II. 3.1. donne

$$\mu^*(E) \le \mu^*(A \cap B \cap E) + \mu^* \{(A \cap B)^c \cap E\}$$

et donc

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap B \cap E) + \mu^* \{(A \cap B)^c \cap E\}.$$

Ce qui montre que $A \cap B \in \mathcal{B}$. Le fait que $A \in \mathcal{B} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{B}$ découle trivialement de l'égalité

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$$

où $E \in \mathcal{P}(\Omega)$.

ii) μ^* est additive sur $\mathcal{B}$. En effet soient A et B des éléments de $\mathcal{B}$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cup B) &= \mu^* \{(A \cup B) \cap A\} + \mu^* \{(A \cup B) \cap A^c\} \\ &= \mu^*(A) + \mu^*(B).\end{aligned}$$

iii) $\mathcal{B}$ est une tribu. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments dans $\mathcal{B}$. On veut montrer que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

est un élément de $\mathcal{B}$. On peut supposer que les A_n sont deux à deux disjoints ; s'ils ne le sont pas on pose

$$A'_n = \begin{cases} A_1 & \text{pour } n = 1 \\ A_n \cap A^c_{n-1} \cap \ldots \cap A^c_1 & \text{pour } n \ge 2 \end{cases}$$

et on remarque qu'on a

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n.$$

Ce n'est donc pas une restriction de supposer

$$A_n \cap A_p = \emptyset \text{ pour } n \ne p.$$

Soient $E \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Alors comme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n) &= \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) \\ &\le \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \\ &< +\infty\end{aligned}$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ converge ; donc pour N suffisamment grand on a

$$\mu^*\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{N}(A_n \cap E)\right\}^c\right) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap E) \leq \varepsilon. \tag{II.6}$$

Maintenant comme

$$E = \left(\bigcup_{n=1}^{N}(A_n \cap E)\right) \cup \left(\left\{\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right\}^c \cap E\right)$$

qui est une réunion disjointe on a

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N}(A_n \cap E)\right) + \mu^*\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right\}^c \cap E\right). \tag{II.7}$$

Sommant le premier et le troisième membres de (II.6) respectivement avec le deuxième et le premier membres de (II.7) on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon + \mu^*(E) \geq \mu^*\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{N}(A_n \cap E)\right\}^c\right) &+ \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N}(A_n \cap E)\right) \\ &+ \mu^*\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right\}^c \cap E\right).\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}\varepsilon + \mu^*(E) &\geq \mu^*\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right\}^c \cap E\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap E)\right) \\ &\geq \mu^*\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}^c \cap E\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap E)\right).\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient

$$\mu^*(E) \geq \mu^*\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}^c \cap E\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap E)\right).$$

Comme l'inégalité

$$\mu^*(E) \leq \mu^*\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}^c \cap E\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap E)\right)$$

est vérifiée de manière évidente, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}^c \cap E\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap E)\right)$$

i.e.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$$

qui montre bien que $\mathcal{B}$ est une tribu.

iv) μ^* est une mesure bornée sur $\mathcal{B}$. Soit toujours $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints. Comme μ^* est une mesure extérieure on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{II.8}$$

D'autre part comme pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n).$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$ on obtient

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{II.9}$$

Les inégalités (II.8) et (II.9) donnent

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Ceci montre bien la σ-additivité de μ^* qui est donc une mesure sur $\mathcal{B}$. Elle est trivialement bornée. □

3.4. Lemme. *La tribu $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$ engendrée par $\mathcal{A}_0$ est contenue dans $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{A}_0$ est contenue dans $\mathcal{B}$ car celle-ci est une tribu. Soient $A \in \mathcal{A}_0$; il s'agit de montrer que pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E).$$

Comme

$$\mu^*(E) = \inf_{S\in\mathcal{S}_E} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\right\}$$

où $\mathcal{S}_E$ est l'ensemble de toutes les suites $S = (A_n)$ telles que $A_n \in \mathcal{A}_0$ et $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $S = (A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}_A$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Mais

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A^c \cap A_n) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)\end{aligned}$$

et donc

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(E).$$

Comme l'inégalité

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \geq \mu^*(E)$$

est évidente, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E).$$

Ce qui montre bien que $A \in \mathcal{B}$. □

3.5. Lemme. *Soit ν une mesure sur $\mathcal{B}$ qui coïncide avec μ sur $\mathcal{A}_0$. Alors ν coïncide avec μ^* sur $\sigma(\mathcal{A}_0)$.*

Démonstration. Soit

$$\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{B} \ : \ \nu(A) = \mu^*(A)\}.$$

Il est clair que $\mathcal{B}_0$ est une algèbre de Boole contenant $\mathcal{A}_0$. Nous allons montrer que $\mathcal{B}_0$ contient $\sigma(\mathcal{A}_0)$. Pour cela il suffit de montrer que $\mathcal{B}_0$ est une tribu : soit (A_n) une suite dans $\mathcal{B}_0$ qui tend en croissant vers A. Alors

$$\nu(A) = \lim_{n \to +\infty} \nu(A_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(A).$$

Donc $A \in \mathcal{B}_0$. Ce qui termine la démonstration du lemme. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

3.6. Théorème de prolongement. *Soient $\mathcal{A}_0$ une algèbre de Boole sur Ω et $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}_0$. Alors toute mesure bornée sur $(\Omega, \mathcal{A}_0)$ se prolonge de manière unique en une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.*

Démonstration. La mesure extérieure μ^* donnée par l'égalité (II.5) et restreinte à $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$ donne le prolongement qui est unique d'après le lemme II. 3.2. □

Ce théorème, qui reste valable même si la mesure n'est pas bornée, permet de construire le produit d'un nombre fini de mesures et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

3.7. Produit tensoriel de mesures

Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, ..., $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ des espaces mesurés. La famille $\mathcal{S}$ des parties de $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ de la forme $A_1 \times \ldots \times A_n$ où $A_i \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ est une semi-algèbre de Boole. Alors en posant

$$\mu_0(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n)$$

on peut définir une mesure sur l'algèbre de Boole $\mathcal{A}_0$ engendrée par $\mathcal{S}$ qui se prolonge de façon unique en une mesure sur $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$ qu'on notera $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ et qu'on appelle le *produit tensoriel* de μ_1, ..., μ_n.

3.8. Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

On pose $\Omega =]0,1]$. Alors l'ensemble des parties de Ω de la forme

$$A = \bigcup_{i=1}^{k}]a_i, b_i] \tag{II.10}$$

avec $0 \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \ldots \le a_k \le b_k \le 1$ est une algèbre de Boole $\mathcal{A}_0$ sur Ω qui engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}_\Omega$. Pour $A \in \mathcal{A}_0$ de la forme (II.10) on pose

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i). \tag{II.11}$$

Alors μ est une mesure finie sur $\mathcal{A}_0$. D'après le théorème de prolongement elle s'étend de manière unique en une mesure λ_0 sur $\mathcal{B}_\Omega$.

Pour tout $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ soit $A_n = A \cap]n, n+1]$; d'autre part si $a \in \mathbb{R}$, $a + A$ sera l'ensemble $\{a + x \ : \ x \in A\}$. On pose

$$\lambda(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_0(-n + A_n) \tag{II.12}$$

On obtient ainsi sur $\mathbb{R}$ une mesure λ, σ-finie appelée *mesure de Lebesgue*.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est obtenue en faisant le produit tensoriel n fois de la mesure λ.

Le lecteur peut vérifier que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (et sur $\mathbb{R}^n$ aussi) est invariante par translation *i.e.* pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ et tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\lambda(u + A) = \lambda(A).$$

C'est une propriété importante de λ. Malheureusement cette mesure λ a un point faible car elle ne permet pas de mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$ même quand elles

sont bornées. L'idéal, en théorie de la mesure (sur $\mathbb{R}$), serait de pouvoir construire une fonction d'ensemble μ sur tous les bornés, positive, σ-additive et telle que

i) $\mu([0,1]) = 1$,

ii) si A et B sont bornés et isométriques, alors $\mu(A) = \mu(B)$.

Ce problème est connu comme étant *le problème difficile de la théorie de la mesure.* Il admet une solution négative comme le montre la construction qui suit.

Supposons que le problème a une solution. Sur $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ on considère la relation d'équivalence

$$x \text{ équivalent à } y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

où $\mathbb{Q}$ est le corps des nombres rationnels. Soit B une partie de $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ contenant un et un seul élément de chaque classe d'équivalence (toujours possible par l'axiome du choix). Soient $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ l'ensemble des rationnels de l'intervalle $[-1, +1]$ et posons $B_n = a_n + B$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors les B_n sont deux à deux disjoints et tels que

$$\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \subset \left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right].$$

On aura

$$\mu\left(\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]\right) = 1 \quad \text{et} \quad \mu\left(\left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right]\right) = 3$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu(B_n) = \mu(B).$$

Comme on a supposé que μ est σ-additive on aura

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(B) + \mu(B) + \ldots \leq 3.$$

La première inégalité implique que la quantité $\mu(B)$ est strictement positive et la deuxième inégalité implique que $\mu(B)$ est nulle. Ce qui est une contradiction. □

La construction qui précède montre en particulier qu'il existe des parties, en l'occurrence B, qui ne sont pas mesurables au sens de Lebesgue.

4. Propriétés vraies presque partout

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

4.1. Définition. *On dira que $A \subset \Omega$ est de* **mesure nulle** *pour μ si $A \in \mathcal{A}$ et vérifie $\mu(A) = 0$. On dira que A est négligeable s'il est contenu dans un ensemble de mesure nulle.*

Une propriété sur Ω est dite vérifiée *presque partout* pour la mesure μ (en abrégé μ-pp) si l'ensemble des éléments de Ω qui ne la vérifient pas est de mesure nulle.

4.2. Exemples

On dira que
i) $f, g \in \mathcal{M}$ sont *égales* μ-pp si

$$\mu\left(\{\omega \in \Omega \ : \ f(\omega) \neq g(\omega)\}\right) = 0.$$

ii) La suite (f_n) dans $\mathcal{M}$ *tend* μ-pp vers $f \in \mathcal{M}$ si

$$\mu\left(\{\omega \in \Omega \ : \ f_n(\omega) \text{ ne tend pas vers } f(\omega)\}\right) = 0.$$

La notion de "*propriété vérifiée presque partout*" est très importante en théorie de la mesure ; elle interviendra constamment dans ce cours.

5. Exercices

5.1. Soit Ω un ensemble. Pour tout $A \subset \Omega$ on pose $m(A) = |A|$ (cardinal de A) si A est fini et $m(A) = +\infty$ sinon.

i) Montrer qu'on définit ainsi sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ une mesure (appelée *mesure de comptage*).

ii) Montrer que m est σ-finie si, et seulement si, Ω est dénombrable.

5.2. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ de l'exercice II. 5.1. Si $A \subset \mathbb{N}$ on pose

$$\mu(A) = \limsup \frac{1}{n} m(A \cap \{1, \ldots, n\})$$

et on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{N}$ pour lesquelles

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} m(A \cap \{1, \ldots, n\}) \right)$$

existe.

i) Montrer que si A est fini alors $\mu(A) = 0$.

ii) Montrer que μ est finiment additive sur $\mathcal{A}$.

iii) Montrer que μ n'est pas σ-additive sur $\mathcal{A}$.

5.3. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est σ-finie et on pose

$$E = \left\{\omega \in \Omega \ : \ \mu(\{\omega\}) > 0\right\}.$$

Montrer que E est dénombrable. (Comme μ est σ-finie on a $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ avec $\mu(\Omega_i) < +\infty$. Considérer alors l'ensemble $E_i^n = \left\{\omega \in E \cap \Omega_i : \mu(\{\omega\}) > \frac{1}{n}\right\}$).

5.4. Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures telles que pour tout $A \in \mathcal{A}$ on ait

$$\mu_1(A) \leq \mu_2(A) \leq \ldots \leq \mu_n(A) \leq \ldots$$

Si $A \in \mathcal{A}$ on pose $\mu(A) = \lim_{n \to +\infty} \mu_n(A)$. Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

5.5. Montrer que tout hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ a une mesure de Lebesgue nulle. (On admet que la mesure λ est invariante par toute isométrie de $\mathbb{R}^n$; on peut donc supposer que cet hyperplan qu'on notera H est défini par l'équation $x_n = 0$, que H est limite croissante de la suite de compacts $C_k = \underbrace{[-k,+k] \times \ldots \times [-k,+k]}_{(n-1) \text{ fois}} \times \{0\}$.)

5.6. Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de probabilités sur $\mathcal{A}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels non négatifs tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\mu_n$ est une probabilité sur $\mathcal{A}$.

5.7. Soient $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ un ensemble dénombrable, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels non négatifs tels que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \infty.$$

Montrer que la formule $\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 1_A(\omega_n)$ définit une mesure finie sur $\mathcal{A}$. Démontrer que toute mesure finie sur $\mathcal{A}$ est de ce type pour une certaine suite (a_n) pour laquelle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \infty.$$

CHAPITRE III
Intégrale de Lebesgue

L'intégrale de Lebesgue généralise de loin celle de Riemann : une fonction Lebesgue-intégrable peut être partout discontinue alors qu'une fonction Riemann-intégrable est presque partout continue. Dans ce sens la première notion s'avère beaucoup plus utile et opérationnelle que la seconde. L'objet de ce chapitre est de définir l'intégrale de Lebesgue sur un espace mesuré quelconque et décrire ses propriétés (qui sont nombreuses !). Nous démontrons le lemme de Fatou, le théorème de convergence dominée et l'illustrons par quelques applications : continuité de l'intégrale dépendant d'un paramètre, dérivation sous le signe somme. Ce dernier théorème, dû à Lebesgue, est certainement l'un des outils les plus puissants de l'analyse mathématique.

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sera un espace mesuré. On rappelle les notations utilisées dans les chapitres antérieurs.

$$\mathcal{M} = \{\text{fonctions réelles mesurables sur } \Omega\} \qquad \mathcal{M}_+ = \{f \in \mathcal{M} : f \geq 0\}$$

$$\mathcal{E} = \{\text{fonctions réelles étagées sur } \Omega\} \qquad \mathcal{E}_+ = \{\varphi \in \mathcal{E} \ : \ \varphi \geq 0\}.$$

D'autre part : a) *toute fonction $f \in \mathcal{M}_+$ est limite simple d'une suite croissante dans $\mathcal{E}_+$* ; b) *toute fonction $f \in \mathcal{M}$ est limite simple d'une suite dans $\mathcal{E}$.*

1. Intégrale supérieure

Pour les fonctions étagées positives, la définition sera immédiate ; on passera ensuite aux fonctions mesurables positives en usant du point a) qu'on vient de rappeler. Dans ces deux situations l'intégrale est un élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$ défini sans ambiguité. Pour une fonction mesurable quelconque il faut imposer une certaine condition qui est assez naturelle comme on le verra.

Soit $f \in \mathcal{E}_+$. Alors f peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i}$$

où $(A_1, \dots, A_k)$ est une partition de Ω par des éléments de $\mathcal{A}$ et $a_1, \dots, a_k$ sont des nombres réels positifs ou nuls.

1.1. Lemme. *Le nombre positif (fini ou égal à $+\infty$)*

(III.1) $$\sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i)$$

ne dépend pas de la partition choisie qui représente la fonction f.

Démonstration. Soit $(B_1, \ldots, B_\ell)$ une autre partition de Ω par des éléments de $\mathcal{A}$ telle que

$$f = \sum_{j=1}^{\ell} b_j 1_{B_j}$$

où $b_1, \ldots, b_\ell \in \mathbb{R}_+$. Alors $(A_i \cap B_j)_{i,j}$ est une partition de Ω et on a $a_i = b_j$ pour $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. D'autre part si on fixe $i \in \{1, \ldots, k\}$ (resp. $j \in \{1, \ldots, \ell\}$) alors $(A_i \cap B_j)_{j=1,\ldots,\ell}$ (resp. $(A_i \cap B_j)_{i=1,\ldots,k}$) est une partition de A_i (resp. de B_j). On aura donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{\ell} \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{k} b_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\ell} b_j \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\ell} b_j \mu(B_j).
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme. □

Le lemme III. 1.1 nous permet alors de donner la

1.2. Définition. *On appelle* **intégrale supérieure** *de la fonction $f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$ le nombre (fini ou égal à $+\infty$)*

(III.2) $$I^*(f) = \int_{\Omega}^{*} f d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i).$$

On a bien entendu $\int_{\Omega}^{*} 1_A d\mu = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

1.3. Proposition. *Soient $f, g \in \mathcal{E}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+$. Alors on a*

i) $I^*(f) \geq 0$;
ii) $I^*(af) = aI^*(f)$;
iii) $I^*(f+g) = I^*(f) + I^*(g)$;
iv) $f \leq g \Longrightarrow I^*(f) \leq I^*(g)$.
Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{E}_+$ qui tend en croissant vers f. Alors
v) la suite $(I^*(f_n))$ tend en croissant vers $I^*(f)$.

Démonstration. Nous ne démontrerons que les points iii), iv) et v) ; les autres sont évidents.

iii) On peut écrire f et g sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i} \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^{\ell} b_j 1_{B_j}$$

où $(A_1, \ldots, A_k)$ et $(B_1, \ldots, B_\ell)$ sont des partitions de Ω et a_i et b_j sont des réels positifs ou nuls. On a

$$\begin{aligned} f+g &= \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i} + \sum_{j=1}^{\ell} b_j 1_{B_j} \\ &= \sum_{i,j} (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I^*(f+g) &= \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{\ell} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{\ell} b_j \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{\ell} b_j \mu(B_j) \\ &= I^*(f) + I^*(g) \end{aligned}$$

qui démontre ce qu'on cherche.

iv) On peut écrire $g = f + (g - f)$ où f et $g - f$ sont dans $\mathcal{E}_+$. D'après iii) on a

$$I^*(g) = I^*(f) + I^*(g - f)$$

qui donne $I^*(f) \leq I^*(g)$.

v) On peut d'abord remarquer que pour tout n, $f_n \leq f$; d'où $I^*(f_n) \leq I^*(f)$. Ce qui donne

$$\lim_{n \to +\infty} I^*(f_n) \leq I^*(f).$$

Il suffit donc d'établir l'inégalité

$$\lim_{n \to +\infty} I^*(f_n) \geq I^*(f).$$

Soit $\alpha \in]0,1[$ et posons pour tout n :

$$A_n = \{f_n \geq \alpha f\} = \{\omega \in \Omega \ : \ f_n(\omega) \geq \alpha f(\omega)\}.$$

On a de manière évidente

$$A_n \subset A_{n+1}$$

i.e. la suite (A_n) est croissante et tend vers Ω puisque $\lim f_n \geq \alpha f$.

Comme $f \in \mathcal{E}_+$, il existe une partition $(B_1, \ldots, B_k)$ de Ω, où les B_i sont des éléments de $\mathcal{A}$ et des nombres réels positifs ou nuls $a_1, \ldots, a_k$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{B_i}.$$

Alors $(B_i \cap A_n \uparrow B_i)$; d'où

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} I^*(f.1_{A_n}) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(B_i \cap A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(B_i) \\ &= I^*(f).\end{aligned}$$

Comme, d'autre part, on a $f_n \geq \alpha.f.1_{A_n}$ pour tout n, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} I^*(f_n) \geq \alpha \lim_{n\to+\infty} I^*(f.1_{A_n}) = \alpha I^*(f).$$

L'inégalité $\lim_{n\to+\infty} I^*(f_n) \geq \alpha I^*(f)$ étant vraie pour tout $\alpha \in]0,1[$, elle le restera quand $\alpha \to 1$; d'où

$$\lim_{n\to+\infty} I^*(f_n) \geq I^*(f).$$

□

La démonstration qui précède contient en même temps celle de la proposition (dite de Beppo-Levi) :

Si $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite croissante dans* $\mathcal{E}_+$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} f_n$ *soit* $\geq f$ *alors* $\lim I^*(f_n) \geq I^*(f)$.

Nous allons maintenant définir l'intégrale supérieure d'une fonction mesurable positive quelconque en utilisant le fait qu'une telle fonction est limite d'une suite de fonctions étagées positives.

1.4. Lemme. *Soient* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* (f_n) *et* (h_n) *deux suites dans* $\mathcal{E}_+$ *tendant en croissant vers* f. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} I^*(f_n) = \lim_{n\to+\infty} I^*(h_n).$$

Démonstration. Comme (f_n) tend en croissant vers f on a pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$f_p \leq f = \lim_{n\to+\infty} h_n.$$

D'après la propriété de Beppo-Levi on a

$$I^*(f_p) \leq \lim_{n\to+\infty} I^*(h_n) \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

En prenant la limite pour $p \to +\infty$ du membre de gauche, on obtient

$$\lim_{p\to+\infty} I^*(f_p) \leq \lim_{n\to+\infty} I^*(h_n).$$

On démontre de même que

$$\lim_{n\to+\infty} I^*(h_n) \leq \lim_{p\to+\infty} I^*(f_p)$$

qui donne finalement

$$\lim_{n\to+\infty} I^*(f_n) = \lim_{n\to+\infty} I^*(h_n).$$

□

On peut donc donner la définition qui suit.

1.5. Définition. *On appelle* ***intégrale supérieure*** *d'une fonction mesurable positive sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *le nombre*

$$I^*(f) = \int_\Omega^* f(\omega)d\mu(\omega) = \lim_{n\to+\infty} I^*(f_n)$$

où (f_n) *est une suite quelconque dans* $\mathcal{E}_+$ *tendant en croissant vers* f.

Pour les fonctions mesurables positives on a une proposition analogue à la proposition III. 1.3. Nous allons l'énoncer sans démonstration.

1.6. Proposition. *Soient* $f, g \in \mathcal{M}_+$ *et* $a \in \mathbb{R}_+$. *Alors on a*
i) $I^*(f) \geq 0$;
ii) $I^*(af) = aI^*(f)$;
iii) $I^*(f+g) = I^*(f) + I^*(g)$;
iv) $f \leq g \Longrightarrow I^*(f) \leq I^*(g)$.
Soit (f_n) *une suite dans* $\mathcal{M}_+$ *qui tend en croissant vers* f. *Alors*
v) la suite $(I^*(f_n))$ *tend en croissant vers* $I^*(f)$.

2. Intégrale d'une fonction mesurable

On sait que toute fonction mesurable f sur Ω s'écrit sous forme de différence de deux fonctions mesurables positives en l'occurrence

$$f^+ = \sup(f, 0) \text{ et } f^- = \sup(-f, 0).$$

Pour avoir la linéarité on est amené à définir l'intégrale de f comme étant la différence $I^*(f^+) - I^*(f^-)$; ce qui est parfaitement cohérent mais à condition que cette expression ait un sens. Par exemple si $I^*(f^+) = I^*(f^-) = +\infty$, cette différence reste indéterminée.

2.1. Définition. *Soit $f \in \mathcal{M}$. On dira que f est* **intégrable** *si on a $I^*(f^+) < +\infty$ et $I^*(f^-) < +\infty$. L'intégrale de f sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est alors le nombre réel*

$$I(f) = \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = I^*(f^+) - I^*(f^-).$$

On dira que f est quasi-intégrable si $I^*(f^+) < +\infty$ ou $I^*(f^-) < +\infty$.

On notera dorénavant l'intégrale de f sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\int f$ s'il n'y a aucune confusion ni sur Ω ni sur la mesure μ. Si l'ensemble Ω supporte plusieurs mesures il y a lieu de préciser (dans la notation de l'intégrale) la mesure par rapport à laquelle on intègre ; la notion d'intégrabilité dépend fortement de la mesure donnée. Sur un même espace Ω, il existe des fonctions intégrables par rapport à une mesure et non intégrables par rapport à une autre : prendre deux mesures μ et ν telles que $\mu(\Omega) < +\infty$ et $\nu(\Omega) = +\infty$ et $f = 1$.

2.2. Exemples

i) Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni de la mesure de Dirac δ_ω au point $\omega \in \Omega$. Si $f \in \mathcal{E}_+$ il existe une partition mesurable $(A_1, \ldots, A_k)$ de Ω et des nombres réels positifs $a_1, \ldots, a_k$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i}.$$

Comme $(A_1, \ldots, A_k)$ est une partition de Ω, il existe un et un seul entier $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $\omega \in A_i$. D'où

$$\int_\Omega f \delta_\omega = a_i \delta_\omega(A_i) = f(\omega).$$

Ainsi toute fonction $f \in \mathcal{E}_+$ est δ_ω-intégrable et son intégrale est égale à $f(\omega)$. Par la décomposition de n'importe quelle fonction $f \in \mathcal{M}$ sous forme $f = f^+ - f^-$ et par le fait que f^+ et f^- sont limites de suites de fonctions de $\mathcal{M}_+$ on montre que f est toujours δ_ω-intégrable et son intégrale vaut $f(\omega)$.

ii) Soit μ une mesure discrète sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ *i.e.*

$$\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i \delta_{\omega_i}$$

où ω_i est une suite de points de Ω et p_i des réels positifs. Alors $f \in \mathcal{M}_+$ est intégrable par rapport à μ si, et seulement si, la série à termes positifs

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i f(\omega_i)$$

est convergente. Par suite $f \in \mathcal{M}$ est μ-intégrable si, et seulement si, les séries

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i f^+(\omega_i) \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} p_i f^-(\omega_i)$$

sont convergentes. Comme $|f| = f^+ - f^-$, ceci est équivalent à la convergence de la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i |f(\omega_i)|.$$

Dans ce cas l'intégrale de f par rapport à μ est

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i f(\omega_i).$$

3. Propriétés de l'intégrale

On note $\mathcal{L}^1$ l'espace des fonctions mesurables et intégrables pour la mesure μ sur Ω et

$$\mathcal{L}^1_+ = \{f \in \mathcal{L}^1 \ : \ f \geq 0\}.$$

Nous allons commencer par montrer que $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel réel.

3.1. Lemme. *Soit $f \in \mathcal{M}$. Alors f est intégrable si, et seulement si, il existe g, $h \in \mathcal{L}^1_+$ telles que $f = g - h$. Dans ce cas on a*

$$\int_\Omega f = I^*(g) - I^*(h).$$

Démonstration. Supposons f intégrable ; alors f^+ et f^- appartiennent à $\mathcal{L}^1_+$ et sont telles que $f = f^+ - f^-$. Il suffit donc de prendre $g = f^+$ et $h = f^-$. Réciproquement supposons que f s'écrit $f = g - h$ avec g, $h \in \mathcal{L}^1_+$. Comme

$$f^+ = g - \inf(g, h) \text{ et } f^- = h - \inf(g, h)$$

on obtient

$$I^*(f^+) < +\infty \ \text{ et } \ I^*(f^-) < +\infty.$$

Donc $f \in \mathcal{L}^1$. D'autre part comme $g + f^- = h + f^+$ on a

$$I^*(g) + I^*(f^-) = I^*(h) + I^*(f^+)$$

c'est-à-dire

$$\int_\Omega f = I^*(f^+) - I^*(f^-) = I^*(g) - I^*(h)$$

qui termine la démonstration du lemme. □

On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables sur Ω nulles presque partout pour la mesure μ ; c'est un espace vectoriel contenu dans $\mathcal{L}^1$.

3.2. Théorème. *L'ensemble $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel réel et l'application qui à toute fonction $f \in \mathcal{L}^1 \longrightarrow ||f||_1 = \int_\Omega |f(\omega)|d\mu(\omega) \in \mathbb{R}_+$ est une norme* (voir chapitre V) *sur le quotient $L^1 = \mathcal{L}^1/\mathcal{N}$.*

Démonstration. i) Montrons d'abord que $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel. Il est évident que si $f \in \mathcal{L}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha f \in \mathcal{L}^1$ car

$$\alpha f = \begin{cases} \alpha f^+ - \alpha f^- & \text{si } \alpha \geq 0 \\ \alpha f^- - \alpha f^+ & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$ et posons $h = f + g$. Alors

$$h = (f+g)^+ - (f+g)^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-).$$

On a $f^+ + g^+ \in \mathcal{L}^1_+$ et $f^- + g^- \in \mathcal{L}^1_+$ car f et g sont intégrables ; d'après le lemme III. 3.1, la fonction h est donc intégrable et

$$\begin{aligned} \int_\Omega h &= \int_\Omega^* (f^+ + g^+) - \int_\Omega^* (f^- + g^-) \\ &= \left(\int_\Omega^* f^+ - \int_\Omega^* f^-\right) + \left(\int_\Omega^* g^+ - \int_\Omega^* g^-\right) \\ &= \int_\Omega f + \int_\Omega g. \end{aligned}$$

L'application $f \in \mathcal{L}^1 \longrightarrow ||f||_1 = \int_\Omega |f|$ induit une norme sur L^1 car

(*) $|f + g| \leq |f| + |g|$ et donc

$$\int_\Omega |f+g| \leq \int_\Omega |f| + \int_\Omega |g|.$$

(**) la propriété de séparation découle de la proposition III. 3.3. qui suit. □

3.3. Proposition. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Alors*

$$\int_\Omega^* f = 0 \Longleftrightarrow f \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_+.$$

Démonstration. On suppose d'abord $f \in \mathcal{E}_+$ *i.e.*

$$f = \sum_{i=1}^k a_i 1_{A_i}$$

où $(A_1, \ldots, A_k)$ est une partition mesurable de Ω et $a_1, \ldots, a_k$ des réels positifs. On a

$$I^*(f) = \int_\Omega^* f = \sum_{i=1}^k a_i \mu(A_i)$$

Si $I^*(f) = 0$ alors pour tout $i = 1, \ldots, k$ on a $a_i\mu(A_i) = 0$. Ce qui donne $a_i = 0$ ou $\mu(A_i) = 0$; dans tous les cas $I^*(f) = 0 \Longleftrightarrow f \in \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_+$.

Si $f \in \mathcal{M}_+$ n'est pas forcément dans $\mathcal{E}_+$ on considère une suite $f_n \in \mathcal{E}_+$ qui tend en croissant vers f. Si $f = 0$ μ-pp, $f_n = 0$ μ-pp pour tout n puisque $0 \leq f_n \leq f$; donc $I^*(f_n) = 0$ d'après ce qui précède et par suite $I^*(f) = \lim I^*(f_n) = 0$.

Supposons $I^*(f) = 0$; alors $I^*(f_n) = 0$ pour tout n puisque $0 \leq f_n \leq f$. Ce qui nous donne $f_n = 0$ μ-pp. Par suite l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ : \ f_n(\omega) > 0\}$ est de mesure nulle. Comme $f(\omega) > 0$ si, et seulement si, l'un au moins des $f_n(\omega) > 0$ on a

$$\{w \in \Omega \ : \ f(\omega) > 0\} = \bigcup_n \{\omega \in \Omega \ : \ f_n(\omega) > 0\}.$$

Donc $f = 0$ μ-pp. □

De cette proposition on tire les conséquences suivantes.

i) *Si $A \in \mathcal{A}$ est de mesure nulle alors pour toute fonction $f \in \mathcal{M}_+$ on a*

$$\int_\Omega 1_A \cdot f = 0.$$

ii) Par définition, l'intégrale de $f \in \mathcal{M}$ sur $A \in \mathcal{A}$ sera

$$\int_A f = \int_\Omega 1_A \cdot f.$$

Dans la proposition qui suit, de démonstration un peu technique et d'ailleurs similaire à celles qui précèdent, nous donnons un certain nombre de propriétés importantes de l'intégrale qui ont autant d'intérêt que le reste.

3.4. Proposition. *On a*

i) $f \in \mathcal{M}$ est intégrable si, et seulement si, $|f|$ est intégrable.

ii) Soient $f \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathcal{L}^1_+$; alors

$$|f| \leq g \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1.$$

iii) Soient $f \in \mathcal{M}$ et $g \in \mathcal{L}^1$; alors

$$f = g \quad \mu - pp \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1 \quad et \quad \int_\Omega f = \int_\Omega g.$$

4. Le théorème de Lebesgue

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant vers une fonction mesurable f. Que peut-on dire de la convergence de la suite $\int f_n$? Si les f_n sont intégrables en est-il de même pour f ? Si oui, dans quelles conditions la suite $\int f_n$ converge-t-elle vers l'intégrale de f ? Nous savons déjà que *si les f_n sont positives et (f_n) tend en croissant vers f alors l'intégrale de f_n tend en croissant vers l'intégrale de f (qu'elle soit finie ou non).* Ce ne sera pas le cas si on supprime ces hypothèses même si la suite converge par exemple uniformément vers f comme le prouve l'exemple qui suit :

On prend $\Omega = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+}$ et $\mu = \lambda$. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions intégrables données par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > n \\ \frac{1}{n} & \text{si } 0 \leq x \leq n \end{cases}$$

Il est clair que (f_n) converge uniformément vers 0 mais la suite des intégrales $\int f_n$ est constante égale à 1.

Le problème du passage à la limite sous le signe d'intégration $\int$ sera résolu, sous certaines hypothèses, par le théorème de Lebesgue auquel est consacrée cette section. Nous commencerons par le

4.1. Lemme de Fatou. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables positives sur* Ω *telles que* $\liminf f_n$ *soit une fonction partout finie sur* Ω. *Alors*

$$\int_\Omega^* (\liminf f_n) \leq \liminf \int_\Omega^* f_n.$$

Démonstration. Rappelons que la limite inférieure de la suite (f_n) est définie comme la limite de la suite croissante de fonctions mesurables positives

$$h_p = \inf_{n\geq p} f_n.$$

D'où

$$\int_\Omega^* (\liminf f_n) = \lim_{p\to+\infty} \int_\Omega^* h_p$$

Comme $h_p \leq f_n$ pour tout $n \geq p$ on a

$$\int_\Omega^* h_p \leq \int_\Omega^* f_n$$

pour tout $n \geq p$. Donc

$$\int_\Omega^* h_p \leq \inf_{n\geq p} \int_\Omega^* f_n = \liminf \int_\Omega^* f_n$$

pour tout p. On passe alors à la limite sur p et on obtient

$$\int_\Omega^* (\liminf f_n) = \lim_{p\to+\infty} \int_\Omega^* h_p \leq \liminf \int_\Omega^* f_n.$$

Ce qui termine la démonstration. □

Cela va nous permettre de démontrer le théorème de Lebesgue connu aussi sous le nom de *théorème de la convergence dominée.*

4.2. Théorème de Lebesgue. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions intégrables sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. *On suppose que*

i) f_n *tend vers* f *presque partout ;*
ii) il existe une fonction intégrable $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que*

$$|f_n| \leq g \textit{ presque partout.}$$

Alors f est intégrable et l'intégrale de f_n tend vers celle de f.

La suite (f_n) qui converge vers f est dominée par la fonction intégrable g ; c'est ce qui explique la dénomination *convergence dominée.*

Démonstration. Soit

$$N = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \ : \ |f_n(\omega)| > g(\omega)\} \right\} \bigcup \{\omega : f_n(\omega) \text{ ne tend pas vers } f(\omega)\}$$

et $M = N^c$. Alors N est un ensemble de mesure nulle en tant que réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle. Comme $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ sur M, on a $|f(\omega)| \leq g(\omega)$ sur M ; donc f est intégrable d'après la proposition III. 3.4.

Nous allons d'abord modifier (presque partout) les éléments de la suite f_n et la fonction f de façon à avoir des inégalités et une convergence vérifiées partout sur Ω. Posons

$$\varphi_n = 1_M f_n, \quad \varphi = 1_M f \quad \text{et} \quad \gamma = 1_M g.$$

Alors les fonctions φ_n, φ et γ sont intégrables d'après la proposition III. 3.4 et

$$\int \varphi_n = \int f_n, \quad \int \varphi = \int f \quad \text{et} \quad \int \gamma = \int g.$$

Il suffit donc, pour démontrer le théorème d'établir que

$$\int \varphi_n \longrightarrow \int \varphi.$$

Remarquons d'abord qu'on a $-\gamma \leq \varphi_n \leq \gamma$. Les fonctions $\varphi_n + \gamma$ sont donc positives et le lemme de Fatou appliqué à la suite $(\varphi_n + \gamma)_{n \geq 1}$ donne

$$\int \liminf (\varphi_n + \gamma) \leq \liminf \int (\varphi_n + \gamma)$$

Comme $\liminf(\varphi_n + \gamma) = \lim \varphi_n + \gamma = \varphi + \gamma$ on a

$$\int \lim \varphi_n + \int \gamma \leq \liminf \int \varphi_n + \int \gamma$$

c'est-à-dire

$$\int \varphi \leq \liminf \int \varphi_n. \tag{III.3}$$

Cette fois-ci on applique le lemme de Fatou à la suite de fonctions positives $(\gamma - \varphi_n)_{n \geq 1}$

$$\int(\gamma-\varphi)=\int \liminf(\gamma-\varphi_n)\leq \liminf\int(\gamma-\varphi_n)$$

i.e.

$$\int\gamma-\int\varphi\leq\int\gamma+\liminf\left(-\int\varphi_n\right).$$

Mais

$$\liminf\left(-\int\varphi_n\right)=-\limsup\int\varphi_n.$$

D'où

(III.4) $$\int\varphi\geq\limsup\int\varphi_n.$$

Les inégalités (III.3) et (III.4) s'écrivent

$$\limsup\int\varphi_n\leq\int\varphi\leq\liminf\int\varphi_n$$

qui montre bien que

$$\int\varphi_n\longrightarrow\int\varphi.$$

Ce qu'il fallait établir. □

5. Applications du théorème de Lebesgue

Du théorème de Lebesgue, on peut tirer des conséquences importantes telles que la continuité ou la dérivabilité d'une foncion définie par une intégrale.

5.1. Théorème. *Soit X un espace métrique et $F:\Omega\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ une application telle que*

i) pour tout $x\in X$, la première application partielle $F(\cdot,x):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ est intégrable ;

ii) pour presque tout $\omega\in\Omega$, la deuxième appliction partielle $F(\omega,\cdot):X\longrightarrow\mathbb{R}$ est continue en x_0 ;

iii) il existe une fonction intégrable $g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que pour presque tout $\omega\in\Omega$ et tout $x\in X$ on ait $|F(\omega,x)|\leq g(\omega)$. Alors la fonction

$$f(x)=\int_\Omega F(\omega,x)d\mu(\omega)$$

est continue en x_0.

Démonstration. Il suffit de montrer que si $(x_n)_{n\geq1}$ est une une suite dans X qui tend vers x_0, alors la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(x_0)$. Soit $(x_n)_{n\geq1}$ une suite dans X convergeant vers x_0. On pose

$$f_n(\omega) = F(\omega, x_n) \text{ et } \varphi(\omega) = F(\omega, x_0).$$

Alors la suite de fonctions f_n est telle que

i) f_n tend presque partout vers φ ;

ii) $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ pour presque tout $\omega \in \Omega$ avec g intégrable.

D'après le théorème de Lebesgue

$$f(x_n) = \int_\Omega f_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \varphi = f(x_0)$$

i.e. f est continue en x_0. □

La deuxième application concerne la dérivation sous le signe $\int$ dont la démonstration est laissée au lecteur.

5.2. Théorème. *Soient $(E, \|\ \|)$ un espace normé (cf. chapitre V), U un ouvert de E et $F : \Omega \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que*

i) pour tout $x \in U$, la première application partielle $F(\cdot, x) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable ;

ii) pour presque tout $\omega \in \Omega$, la deuxième application partielle $F(\omega, \cdot) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur U ;

iii) il existe une fonction intégrable $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour presque tout $\omega \in \Omega$ et tout $x \in U$ on ait

$$|||d_x F(\omega, x)||| \leq g(\omega)$$

où $d_x F$ est la différentielle de F au point x qui est une forme linéaire continue sur E et

$$|||d_x F(\omega, x)||| = \sup_{\|h\| \leq 1} |\langle h, d_x F(\omega, x)\rangle|.$$

Soit f la fonction définie sur U par

$$f(x) = \int_\Omega F(\omega, x) d\mu(\omega)$$

Alors pour tout vecteur h de E et tout point x de l'ouvert U, la fonction qui à tout point $\omega \in \Omega$ associe $\langle h, d_x F(\omega, x)\rangle$ est intégrable, f est différentiable et

$$\langle h, d_x f\rangle = \int_\Omega \langle h, d_x F(\omega, x)\rangle d\mu(\omega).$$

Ici $\langle h, \phi\rangle$ est l'évaluation de la forme linéaire ϕ en le vecteur $h \in E$.

Nous terminons par un exemple d'application du théorème de Lebesgue sur les séries doubles de nombres réels.

5.3. Théorème *Soit (x_{np}) une suite de réels indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On suppose*

i) qu'il existe une suite de réels (x_p) telle que la limite $\lim_{n \to +\infty} x_{np}$ soit égale à x_p pour tout $p \in \mathbb{N}$;

ii) qu'il existe une suite de réels positifs (y_p) telle que l'on ait

$$|x_{np}| \leq y_p \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} y_p < +\infty.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{p=0}^{\infty} |x_{np}| < +\infty, \ \sum_{p=0}^{\infty} |x_p| < +\infty \ \textit{et} \ \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} x_{np} = \sum_{p=0}^{\infty} x_p.$$

Démonstration. On pose $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mu = m$ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. L'intégrale d'une fonction s'écrit alors sous forme de série. La suite double (x_{np}) s'interprète comme la suite de fonctions mesurable f_n définies sur $\mathbb{N}$, par $f_n(p)$ (la variable p joue le rôle de ω), la suite (x_p) est la fonction $f(p) = x_p$ et enfin (y_p) est la fonction $g(p) = x_p$ qui domine. La condition i) traduit la convergence (partout) de f_n vers f et les conditions dans ii) traduisent l'intégrabilité de g et le fait qu'elle domine les f_n.

Le théorème de Lebesgue nous dit alors que les f_n sont intégrables, la fonction f est intégrable et l'intégrale de f_n tend vers celle de f soit

$$\sum_{p=0}^{\infty} |x_{np}| < +\infty, \ \sum_{p=0}^{\infty} |x_p| < +\infty \ \text{et} \ \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} x_{np} = \sum_{p=0}^{\infty} x_p.$$

Ce qu'il fallait établir. □

6. Exercices

6.1. Soient $\Omega = [0, +\infty[$, $\mathcal{B}_\Omega$ sa tribu borélienne et λ la mesure de Lebesgue. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [n, 2n], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vérifier que f_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction identiquement nulle mais que $\int_\Omega f_n d\lambda$ ne converge pas vers 0.

6.2. Soient $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{B}_\Omega$ sa tribu borélienne et λ la mesure de Lebesgue. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vérifier que f_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que (f_n) converge λ-pp vers la fonction identiquement nulle mais que $\int_\Omega f_n d\lambda$ ne converge pas vers 0.

6.3. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, (f_n) une suite de fonctions positives intégrables qui converge μ-pp vers une fonction positive intégrable f. On suppose que $\int_\Omega f_n d\lambda$ tend vers $\int_\Omega f d\mu$. Montrer que $\int_\Omega |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0$. (Utiliser les égalités

$$f_n + f = \sup(f_n, f) + \inf(f_n, f) \text{ et } |f_n - f| = \sup(f_n, f) - \inf(f_n, f)$$

qu'on établira.)

6.4. Montrer en donnant un contre-exemple que les résultats de l'exercice qui précède ne restent pas vrais si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu = +\infty \text{ et } \mu(\Omega) < +\infty.$$

6.5. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction intégrable sur Ω.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ de mesure finie tel que

$$\left| \int_\Omega f d\mu - \int_A f d\mu \right| < \varepsilon.$$

6.6. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $p \in [1, +\infty[$ on désigne par $\mathcal{L}^p$ l'espace des fonctions mesurables de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable pour la mesure μ sur Ω.

i) Supposons que $\mu(\Omega) < +\infty$. Montrer que si $p \leq q$ on a $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$.

ii) On considère l'espace probabilisé $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$, λ est la mesure de Lebesgue. Soit f la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} 1_{]0,1]}$. Montrer que f appartient à $\mathcal{L}^1$ mais qu'elle n'appartient pas à $\mathcal{L}^2$.

iii) On considère l'espace probabilisé $([1, +\infty[, \mathcal{B}_{[1,+\infty[}, \lambda)$.
Montrer que la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ appartient à $\mathcal{L}^2$ mais qu'elle n'appartient pas à $\mathcal{L}^1$.

iv) Quelle conclusion peut-on tirer de ii) et iii) ?

6.7. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On pose $m(f) = \sup\{a \in \mathbb{R} \ : \ \mu(\{f < a\}) = 0\}$ et $M(f) = \inf\{a \in \mathbb{R} \ : \ \mu(\{f > a\}) = 0\}$.

i) Vérifier que $m \leq M$.

ii) Soient $f \in L^\infty$ (*cf.* exercice V. 5.3. pour la définition de L^∞) et $g \in \mathcal{L}^1$. Démontrer la *formule de la moyenne* $m(f) \int_\Omega g d\mu \leq \int_\Omega f g d\mu \leq M(f) \int_\Omega g d\mu$.

6.8. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue. On rappelle que cette mesure est invariante par translation *i.e.* si $A \in \mathcal{B}$ et $r \in \mathbb{R}$ alors $\lambda(r + A) = \lambda(A)$. On notera L^1 l'espace des classes de fonctions λ-intégrables et on admet que l'ensemble $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ nulles en dehors d'un compact est dense (pour la norme $|| \ ||_1$) dans L^1. Soient $A \in \mathcal{B}$ tel que $0 < \lambda(A) < +\infty$ et posons $E = \{x - y \ : \ x, y \in A\}$.

i) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $x \longrightarrow \gamma(x,t) = \mathbf{1}_A(x+t)\mathbf{1}_A(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On pose $h(t) = \int_{\mathbb{R}} \gamma(x,t) d\lambda(x)$. Soit $\varepsilon > 0$; alors on sait qu'il existe $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ (qu'on peut supposer $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$) telle que $||\mathbf{1}_A - \varphi_\varepsilon||_1 < \varepsilon$.

ii) Montrer que la fonction $h_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x) d\lambda(x)$ est continue (penser au théorème de la convergence dominée).

iii) Montrer que $\sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t) - h_\varepsilon(t)| < \varepsilon$ et en déduire que h_ε tend uniformément vers h quand $\varepsilon \to 0$ et donc que h est continue.

iv) Calculer $h(0)$ et montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta$ on ait $h(t) > 0$.

v) Montrer que quel que soit t, $-\delta < t < +\delta$ il existe $x_t \in \mathbb{R}$ tel que $x_t \in A$ et $x_t + t \in A$.

vi) En déduire que E est un voisinage de 0.

Si $\lambda(A) = +\infty$ on peut trouver un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $A_n = A \cap [n, n+1[$ vérifie $0 < \lambda(A_n) < +\infty$. D'après vi) l'ensemble $E_n = \{x - y \ : \ x, y \in A_n\}$ est un voisinage de 0, donc E est aussi un voisinage de 0 puisque $E_n \subset E$.

Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation d'équivalence : x et y sont équivalents si, et seulement si, $x - y$ est rationnel. Dans chaque classe d'équivalence on choisit un et un seul élément (ceci est possible grâce à l'axiome du choix) et on note B l'ensemble de ces éléments.

vii) Montrer que l'ensemble $F = B - B = \{x - y \ : \ x, y \in B\}$ ne contient aucun rationnel non nul. En déduire que F ne peut pas être un voisinage de 0.

viii) Montrer que la famille $\{r + B\}_{r\in\mathbb{Q}}$ forme une partition de $\mathbb{R}$.

Nous allons montrer que B n'est pas mesurable (*i.e.* n'est pas dans $\mathcal{B}$). Supposons qu'il l'est.

ix) Montrer alors qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\lambda(r + B) > 0$. En déduire que $\lambda(B) > 0$ (utiliser l'invariance de λ par translation).

x) En déduire alors d'après les questions précédentes que F est un voisinage de 0 et qu'on arrive ainsi à une contradiction avec vii) et donc que B ne peut pas être mesurable.

CHAPITRE IV
Mesures produit, mesures images et densités

Comme le titre l'indique, dans ce chapitre nous étudions trois points importants en théorie de la mesure et de l'intégration : le théorème de Fubini qui permet de calculer l'intégrale sur un produit d'espaces mesurés par intégrations successives sur chacun des facteurs ; le théorème de transfert qui généralise la méthode bien connue de changement de variable pour une intégrale de Riemann ; les mesures à densité ainsi que le théorème de Radon-Nikodym qui montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure μ soit "dérivable et à dérivée" mesurable par rapport à une autre mesure ν est que μ soit absolument continue par rapport à ν. C'est un résultat fondamental dans le domaine.

1. Le théorème de Fubini

Rappelons d'abord la définition d'une tribu produit donnée au chapitre I. Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ des espaces mesurables, posons $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ et notons $\mathcal{S}$ la semi-algèbre des parties de la forme $A_1 \times \ldots \times A_n$ où $A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$. La tribu $\mathcal{A}$ sur Ω engendrée par $\mathcal{S}$ est appelée *tribu produit* (ou *produit tensoriel*) de $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$. On la notera $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$. En posant

$$\mu_0(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n)$$

on définit une mesure sur l'algèbre de Boole $\mathcal{A}_0$ engendrée par $\mathcal{S}$ qui se prolonge de façon unique en une mesure $\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ sur la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$ qu'on appelle *produit tensoriel* de $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. Pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et pour tout $\omega_1 \in \Omega_1$, on pose

$$A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 \ : \ (\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{A}\}$$

De même pour tout $\omega_2 \in \Omega_2$

$$A_{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 \ : \ (\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{A}\}.$$

L'ensemble A_{ω_1} (resp. A_{ω_2}) est appelée *section* de A suivant ω_1 (resp. suivant ω_2). Il est facile de voir que $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ et $A_{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$.

Soient $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow E$ une application mesurable et désignons par f_{ω_1} (resp. f_{ω_2}) l'application $\Omega_2 \longrightarrow E$ (resp. $\Omega_1 \longrightarrow E$) qui à ω_2 (resp. à ω_1) associe $f(\omega_1, \omega_2)$. D'autre part pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ on note Φ_A^1 (resp. Φ_A^2) l'application $\Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$) définie par $\Phi_A^1(\omega_1) = \mu_2(A_{\omega_1})$ (resp. $\Phi_A^2(\omega_2) = \mu_1(A_{\omega_2})$). On a alors la proposition qui suit que nous énoncerons sans démonstration.

1.1. Proposition. *Les applications f_{ω_1}, f_{ω_2}, Φ_A^1 et Φ_A^2 sont mesurables et pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ on a*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{\Omega_1} \Phi_A^1(\omega_1) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \Phi_A^2(\omega_2) d\mu_2.$$

On vérifie facilement que

– si (A_n) est une suite dans $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ qui tend en croissant vers $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, alors pour tout $\omega_1 \in \Omega_1$ (resp. $\omega_2 \in \Omega_2$) la section A_{n,ω_1} suivant ω_1 de A_n (resp. la section A_{n,ω_2} de A_n suivant ω_2) tend en croissant vers A_{ω_1} (resp. A_{ω_2}) et

– si (f_n) est une suite croissante de fonctions positives mesurables sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ tendant vers f, alors pour tout $\omega_2 \in \Omega_2$ (resp. $\omega_1 \in \Omega_1$), la suite (f_{n,ω_1}) (resp. (f_{n,ω_2})) tend en croissant vers f_{ω_1} (resp. f_{ω_2}).

Cela va nous permettre de démontrer un théorème important en théorie de la mesure. Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable ; pour tout $\omega_1 \in \Omega_1$ et tout $\omega_2 \in \Omega_2$, on définit $\Psi_1(\omega_1)$ et $\Psi_2(\omega_2)$ par

$$\Psi_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f_{\omega_1}(\omega_2) d\mu_2(\omega_2)$$

et

$$\Psi_2(\omega_2) = \int_{\Omega_1} f_{\omega_2}(\omega_1) d\mu_1(\omega_1).$$

1.2. Théorème de Fubini. *Supposons f $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable. Alors pour tout $i = 1, 2$, Ψ_i est définie μ_i-presque partout, est μ_i-intégrable et on a*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \Psi_1(\omega_1) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \Psi_2(\omega_2) d\mu_2.$$

Démonstration. i) On commencera par $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ de mesure $\mu_1 \otimes \mu_2(A)$ finie ; dans ce cas le résultat découle de la proposition IV. 1.1. Ceci passe par linéarité aux fonctions étagées.

ii) Supposons maintenant f quelconque intégrable et positive. Alors f est limite simple d'une suite croissante de fonctions f_n étagées positives. Pour tout n, f_n est intégrable puisque $0 \leq f_n \leq f$. D'après le point i) on a

$$\text{(IV.1)} \qquad \int f_n d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_n(\omega_1, \omega_2) d\mu_2 \right) d\mu_1.$$

Comme $(f_n) \uparrow f$, $(f_{n,\omega_1}) \uparrow f_{\omega_1}$ et donc $(\Psi_{n,1}) \uparrow \Psi_1$ où

$$\Psi_{n,1}(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f_{n,\omega_1}(\omega_2) d\mu_2.$$

Les fonctions $\Psi_{n,1}$ étant mesurables, Ψ_1 est mesurable. D'autre part la propriété de continuité monotone de l'intégrale implique

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_n d(\mu_1 \otimes d\mu_2) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

qui est strictement inférieure à $+\infty$. D'où

$$
\text{(IV.2)} \qquad
\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \Psi_1(\omega_1) d\mu_1 &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega_1} \Psi_{n,1}(\omega_1) d\mu_1 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f_n(\omega_1,\omega_2) d(\mu_1\otimes\mu_2) \\
&= \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2) d(\mu_1\otimes\mu_2) \\
&< +\infty.
\end{aligned}
$$

L'ensemble

$$
M = \{\omega_1 \in \Omega_1 \;:\; \Psi_1(\omega_1) = \lim_{n\to+\infty} \Psi_{n,1}(\omega_1) = +\infty\}
$$

est donc de mesure nulle (*cf.* exercice IV. 6.1) *i.e.* la fonction Ψ_1 est définie μ_1-presque partout sur Ω_1. La relation (IV.2) dit exactement que

$$
\int_{\Omega_1} \Psi_1(\omega_1) d\mu_1 = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2) d(\mu_1\otimes\mu_2).
$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Le même raisonnement vaut pour Ψ_2.

iii) Si f n'a pas un signe constant, on applique les résultats du point ii) à f^+ et f^- et on obtient ce que l'on cherche. □

On verra sur un exemple (*cf.* exercice IV. 6.2) que la condition d'intégrabilité de f est substantielle ; le fait que les fonctions f_{ω_1} et f_{ω_2} soient intégrables respectivement pour tous les ω_1 et les ω_2 ne suffit pas pour appliquer le théorème de Fubini. Cependant si f est mesurable positive (qu'elle soit intégrable ou non) on a toujours

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2) d(\mu\otimes\mu_2) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2) d\mu_2 \right) d\mu_1 \\
&= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2) d\mu_1 \right) d\mu_2.
\end{aligned}
$$

1.3. Corollaire. *Soient $f_1 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables et posons $f(\omega_1,\omega_2) = f_1(\omega_1)f_2(\omega_2)$. Supposons que f est $\mu_1\otimes\mu_2$-intégrable et f_i non nulle μ_i-presque partout pour tout $i = 1,2$. Alors pour tout $i = 1,2$, f_i est μ_i-intégrable et*

$$
\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2) d(\mu_1\otimes\mu_2) = \int_{\Omega_1} f_1(\omega_1) d\mu_1 \cdot \int_{\Omega_2} f_2(\omega_2) d\mu_2
$$

Dans le paragraphe 5 nous donnerons des exemples d'application du théorème de Fubini.

2. Mesure image et transfert

Le but de ce paragraphe est de démontrer le *théorème de transfert* et énoncer la *formule de changement de variable* qui sont des instruments puissants pour le calcul des intégrales.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : \Omega \longrightarrow E$ une application mesurable. A priori sur $(E, \mathcal{B})$, il n'y pas de mesure ; l'application f va nous permettre d'en mettre une.

2.1. Proposition. *Soit* $\nu : \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *l'application définie par* $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$. *Alors* ν *est une mesure sur* $(E, \mathcal{B})$. *On l'appelle la mesure image de* μ *par l'application* f.

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur. Nous allons plutôt donner celle du

2.2. Théorème de transfert. *Soit* $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Alors la fonction* $h \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* μ*-intégrable si, et seulement si,* h *est* ν*-intégrable. Dans ce cas on a*

$$\int_E h d\nu = \int_\Omega h \circ f d\mu.$$

Démonstration. Elle se fera par étapes comme d'habitude, d'abord pour les fonctions étagées positives, ensuite pour les fonctions positives et finalement dans le cas général.

i) Supposons $h = 1_B$ avec $B \in \mathcal{B}$. Alors $h \circ f = 1_{f^{-1}(B)}$. D'où

$$\int_E 1_B d\nu = \nu(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \int_\Omega 1_{f^{-1}(B)} d\mu = \int_\Omega h \circ f d\mu$$

i.e. dans ce cas le théorème de transfert n'est rien d'autre que la définition de la mesure image ν, de μ par l'application f. Par linéarité ceci passe aux fonctions étagées positives.

ii) Supposons $h \in \mathcal{M}_+$ et soit h_n une suite de fonctions mesurables étagées positives sur E qui tend en croissant vers h. La propriété de continuité monotone de l'intégrale donne

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E h_n d\nu = \int_E h d\nu.$$

Mais d'après le point i) on a

$$\int_E h_n d\nu = \int_\Omega h_n \circ f d\mu.$$

D'où

$$\int_E h d\nu = \lim_{n \to +\infty} \int_E h_n d\nu = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega h_n \circ f d\mu = \int_\Omega h \circ f d\mu.$$

Pour les fonctions positives on confond l'intégrale $\int$ avec l'intégrale supérieure $\int^*$.

iii) Supposons maintenant que h est mesurable quelconque. Alors dire que h est ν-intégrable, c'est dire que h^+ et h^- sont ν-intégrables. D'après le point ii) ceci est équivalent à dire que $h^+ \circ f$ et $h^- \circ f$ sont μ-intégrables et on a

$$\int_E h^+ d\nu = \int_\Omega h^+ \circ f d\mu \text{ et } \int_E h^- d\nu = \int_\Omega h^- \circ f d\mu.$$

Par suite h est ν-intégrable si, et seulement si, $h \circ f$ est μ-intégrable et on a

$$\int_E h d\nu = \int_\Omega h \circ f d\mu.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème. □

Un cas particulier de ce théorème est celui où Ω et E sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur Ω et $f : x \in \Omega \longrightarrow f(x) = y \in E$ un difféomorphisme de classe C^1 *i.e.* f est une application bijective dérivable à dérivée continue ainsi que son inverse f^{-1}. On rappelle que f est définie par n applications $f_1, \ldots, f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et que pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = 1, \ldots, n$, la fonction $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ (où $x = (x_1, \ldots x_n)$) est continue ; la matrice

$$J(f)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice jacobienne* de f et son déterminant $\Delta(f)$ *jacobien* de f. Dans cette situation on a la formule suivante que nous donnerons sans démonstration.

2.3. Formule de changement de variable. *La fonction $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est λ-intégrable si, et seulement si, $h \circ f$ est $|\Delta(f)|\lambda$-intégrabe. Dans ce cas*

$$\int_E h(y) d\lambda(y) = \int_\Omega h \circ f(x) |\Delta(f)(x)| d\lambda(x).$$

Cette formule généralise le procédé habituel de changement de variable pour le calcul de l'intégrale de Riemann dans $\mathbb{R}$ dont tout le monde connaît l'intérêt.

3. Mesures à densité

A partir d'une mesure donnée μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ on peut en construire d'autres à l'aide de fonctions mesurables positives. De telles mesures ont un "bon comportement" par rapport à μ. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable positive sur Ω.

3.1. Proposition. *L'application $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ définie par*

$$\nu(A) = \int_A f(\omega) d\mu(\omega)$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée mesure de densité f.

Démonstration. On a de manière évidente

$$\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f(\omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega 1_\emptyset(\omega) f(\omega) d\mu(\omega) = 0$$

qui montre bien que l'application ν est non constante avec la valeur $+\infty$. Soient A et B des éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Comme $1_{A \cap B} = 1_A + 1_B$ on a

$$\begin{aligned} \nu(A \cup B) &= \int_{A \cup B} f(\omega) d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega 1_A(\omega) f(\omega) d\mu(\omega) + \int_\Omega 1_B(\omega) f(\omega) d\mu(\omega) \\ &= \int_A f(\omega) d\mu(\omega) + \int_B f(\omega) d\mu(\omega) \\ &= \nu(A) + \nu(B). \end{aligned}$$

La fonction d'ensemble ν est donc additive. Pour terminer il suffit de montrer que si (A_n) est une suite dans $\mathcal{A}$ qui tend en croissant vers $A \in \mathcal{A}$, alors la suite $\nu(A_n)$ tend en croissant vers $\nu(A)$. En effet la suite de fonctions positives $1_{A_n} f$ tend en croissant vers $1_A f$; d'après la propriété de continuité monotone de l'intégrale on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \nu(A_n) &= \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega 1_{A_n}(\omega) f(\omega) d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega 1_A(\omega) f(\omega) d\mu(\omega) \\ &= \nu(A). \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat cherché. □

Habituellement la mesure ν est notée $f \cdot \mu$; c'est le produit de la mesure μ par la fonction f.

On dira qu'une mesure ν est *absolument continue* par rapport à une autre mesure μ si pour $A \in \mathcal{A}$ on a l'implication

$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0.$$

S'il existe $N \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $\nu(N^c) = 0$, on dira que ν est *étrangère* à μ.

3.2. Exemples

– pour toute mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et toute fonction réelle mesurable positive f sur Ω, la mesure $\nu = f \cdot \mu$ est absolument continue par rapport à μ.

– une mesure discrète $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{a_n}$ (où a_n est une suite de réels et les p_n des réels positifs) est étrangère à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$. En effet si on pose $N = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ on a $\lambda(N) = 0$ puisque toute partie dénombrable est de mesure nulle pour λ et $\nu(N^c) = 0$ par définition même de ν.

On peut bien entendu se poser la question de savoir si étant donnée une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$, les seules mesures absolument continues par rapport à μ sont du type $f \cdot \mu$ où $f \in \mathcal{M}_+$. La réponse est positive comme on va le voir.

4. Théorème de Radon-Nikodym

Une des démonstrations de ce théorème utilise la *représentation de Riesz* d'une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert. La démonstration que nous allons donner se situe dans le cadre général de la notion de *mesure à signe.*

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A})$ sera un espace mesurable *i.e.* Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.

4.1. Définition. *On appelle* **mesure à signe** *sur $\mathcal{A}$ toute fonction d'ensemble μ sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ telle que*

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) μ est σ-additive i.e. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

On ne permet pas à μ de prendre la valeur $-\infty$ pour ne pas avoir à gérer des situations du type $+\infty + (-\infty)$. Le mot *mesure* signifie mesure (positive) au sens où on l'a entendu jusqu'à présent. Dans le cas où la mesure n'est pas forcément positive on parlera de *mesure à signe* au sens de la définition IV. 4.1. Il est à remarquer toutefois qu'une mesure est toujours une mesure à signe.

Par exemple soient ν une mesure sur $\mathcal{A}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que

$$\int_\Omega f^- d\nu < +\infty \text{ où } f^- = \sup(-f, 0).$$

Alors l'application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ définie par $\mu(A) = \int_A f d\nu$ est une mesure à signe sur $\mathcal{A}$.

Une mesure à signe μ sur $\mathcal{A}$ est dite *finie* si pour $A \in \mathcal{A}$ on a $|\mu(A)| < +\infty$.

La proposition qui suit donne quelques propriétés d'une mesure à signe.

4.2. Proposition. *Soit μ une mesure à signe sur $\mathcal{A}$.*

i) Si $A, B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$ et $|\mu(A)| < +\infty$ alors $|\mu(B)| < +\infty$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{A}$.

ii) Si les A_n sont deux à deux disjoints on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < +\infty \Longleftrightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\right| < +\infty.$$

iii) Si $(A_n) \uparrow A$ alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

iv) Si $(A_n) \downarrow A$ et s'il existe n_0 tel que $|\mu(A_{n_0})| < +\infty$, alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur. Les points i) et ii) sont faciles ; les points iii) et iv) se démontrent comme dans le cas d'une mesure positive.

4.3. Définition. *Soient A, B et N dans $\mathcal{A}$. On dira que*

i) A est **positif** *si pour tout $C \in \mathcal{A}$, $C \subset A$ on a $\mu(C) \geq 0$,*

ii) B est **négatif** *si pour tout $C \in \mathcal{A}$, $C \subset B$ on a $\mu(C) \leq 0$,*
iii) N est **nul** *si pour tout $C \in \mathcal{A}$, $C \subset N$ on a $\mu(C) = 0$.*

4.4. Théorème de décomposition de Hahn. *Soit μ une mesure à signe sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors il existe une partition $\Omega = A \cup B$ telle que $A, B \in \mathcal{A}$, A positif et B négatif.*

Pour une démonstration de ce théorème on peut consulter par exemple [Fe].

On dira que (A, B) est une *décomposition de Hahn* pour la mesure μ. Elle n'est pas unique ; en effet si $N \in \mathcal{A}$ est nul, les paires $(A \cup N, B - N)$ et $(A - N, B \cup N)$ sont aussi des décompositions de Hahn pour μ. On démontre facilement que si (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont deux décompositions de Hahn pour μ alors $A_1 \cap B_2$ et $A_2 \cap B_1$ sont nuls. Soit $C \in \mathcal{A}$; les nombres

$$\mu^+(C) = \mu(A \cap C) \text{ et } \mu^-(C) = -\mu(C \cap B)$$

ne dépendent pas de la décomposition de Hahn (A, B) choisie pour μ. Les fonctions d'ensemble μ^+ et μ^- ainsi définies sont des mesures positives. Comme $\mu^-(\Omega) = -\mu(B) < +\infty$, μ^- est bornée ; on a alors

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \tag{IV.3}$$

Les mesures positives μ^+ et μ^- sont appelées respectivement la *variation positive* et la *variation négative* de μ et

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^- \tag{IV.4}$$

est la *variation totale* de la mesure à signe μ. La décomposition (IV.3) est appelée *décomposition de Jordan* de μ.

Avant de donner la démonstration du théorème de Radon-Nikodym, nous allons établir quelques propriétés de l'*absolue continuité entre mesures à signe* que nous commencerons par définir.

4.5. Définition. *Soient μ et ν deux mesures à signe sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On dira que ν est* **absolument continue** *par rapport à μ si, pour $A \in \mathcal{A}$, $|\mu|(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$.*

Nous résumons les propriétés de "continuité absolue" entre mesures à signe dans la proposition qui suit.

4.6. Proposition. *Soient μ et ν deux mesures à signe sur $(\Omega, \mathcal{A})$.*
i) Les assertions a), b) et c) qui suivent sont équivalentes
a) ν est absolument continue par rapport à μ,
b) ν^+ et ν^- sont absolument continues par rapport à μ,
c) $|\nu|$ est absolument continue par rapport à $|\mu|$.
ii) Si ν est finie et absolument continue par rapport à μ, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\mu|(C) < \delta \Longrightarrow |\nu|(C) < \varepsilon.$$

iii) Supposons μ et ν positives et bornées, ν absolument continue par rapport à μ et que ν est non identiquement nulle. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(A) > 0$ et A positif pour la mesure à signe $\nu - \varepsilon\mu$.

Démonstration. i) Démontrons seulement l'implication a) $\Longrightarrow$ b) ; les autres sont évidentes et laissées au lecteur comme exercice. Soient (A, B) une décomposition de Hahn pour ν ; alors pour tout N tel que $|\mu|(N) = 0$ on a $|\mu|(N \cap A) = 0$ et $|\mu|(N \cap B) = 0$. D'après l'hypothèse $|\nu^+|(N) = \nu(N \cap A) = 0$ et $|\nu^-|(N) = \nu(N \cap A) = 0$ qui montre bien que ν^+ et ν^- sont bien absolument continues par rapport à μ.

ii) Faisons un raisonnement par l'absurde : supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, une suite $\delta_n > 0$ et une suite d'éléments $E_n \in \mathcal{A}$ tels que $|\mu(E_n)| < \delta_n$ et $|\nu(E_n)| \geq \varepsilon$. Choisissons la suite δ_n telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ converge (ce qui est toujours possible) et notons E la limite supérieure de la suite E_n ; alors comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < +\infty$$

on a $|\mu|(E) = 0$. D'autre part, comme ν est bornée, on a

$$|\nu|(E) = |\nu|(|\limsup_n E_n)| \geq \limsup_n |\nu|(E_n) \geq \varepsilon.$$

Ceci donne une contradiction.

iii) Soient η_n la mesure à signe $\nu - \frac{1}{n}\mu$ et (A_n, B_n) une décomposition de Hahn de η_n. L'assertion sera démontrée si on prouve l'existence d'un n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) > 0$ car il suffit de prendre $A = A_{n_0}$ et $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Supposons qu'un tel entier n'existe pas. Alors $\mu(A_n) = 0$ pour tout n et donc

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = 0$$

et par suite

$$\nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Comme

$$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^c = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$$

et pour tout n, $\nu(B_n) - \frac{1}{n}\mu(B_n) \leq 0$, on aura

$$\nu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = 0$$

et donc ν est identiquement ; ce qui contredit l'hypothèse. □

Une mesure à signe μ est dite *σ-finie* si les mesures positives μ^+ et μ^- sont σ-finies.

4.7. Théorème de Radon-Nikodym. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ et ν deux mesures à signe sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On suppose μ et ν σ-finies et ν absolument continue par rapport à μ. Alors il existe une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\nu = f \cdot \mu$. En plus*

– f est unique à μ-équivalence près i.e. toute autre fonction mesurable g vérifiant $\nu = g \cdot \mu$ est égale μ-presque partout à f ;

– si ν est bornée, alors f est intégrable.

On dira que f est la *dérivée de Radon-Nikodym* de ν par rapport à μ et on écrira $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Démonstration. Elle se fera en plusieurs étapes.

i) μ et ν positives et bornées.

Soit

$$\mathcal{F} = \left\{ g \in \mathcal{M}_+ \ : \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}, \int_A g d\mu \leq \nu(A) \right\}$$

où $\mathcal{M}_+$ est l'ensemble des fonctions mesurables positives (ou nulles) sur Ω. L'ensemble $\mathcal{F}$ est non vide car il contient clairement la fonction identiquement nulle. En plus si $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{F}$ alors $\sup\{g_1, \dots, g_n\} \in \mathcal{F}$; en effet on pose

$$A_1 = \left\{ g_1 \geq \sup_{1 \leq i \leq n} \{g_i\} \right\}$$

et pour $2 \leq k \leq n$

$$A_k = \left\{ g_k \geq \sup_{1 \leq i \leq n} \{g_i\} \text{ et } g_k > \sup_{1 \leq i \leq k-1} \{g_i\} \right\}.$$

Il est facile de voir que $(A_1, \dots, A_n)$ est une partition mesurable de Ω. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a

$$\begin{aligned} \int_A \left(\sup_{1 \leq i \leq n} \{g_i\} \right) d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \int_{A \cap A_i} g_i d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \nu(A \cap A_i) \\ &= \nu(A) \end{aligned}$$

qui montre bien que $\sup_{1 \leq i \leq n}\{g_i\} \in \mathcal{F}$. On peut généraliser cela facilement (en utilisant le théorème de la convergence monotone) au cas d'une suite infinie $(g_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{F}$: pour une telle suite $\sup g_n \in \mathcal{F}$.

Posons $\delta = \sup_{g \in \mathcal{F}} \left\{ \int_\Omega g d\mu \right\}$. Alors il existe une suite $(g_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{F}$ telle que

$$\int_\Omega g_n d\mu \longrightarrow \delta.$$

Soit $g = \sup_n g_n$; alors $g \in \mathcal{F}$ d'après la remarque qu'on vient de faire ; d'autre part

(IV.5)
$$\int_\Omega g d\mu = \delta \\ \leq \nu(\Omega) \\ < +\infty$$

car ν est supposée bornée. La fonction g est donc μ-intégrable ; d'après l'exercice IV. 5.1, elle est μ-presque partout finie, donc égale μ-presque partout à une fonction f positive, μ-intégrable et partout finie. Cette fonction sera le "bon candidat" pour être $\frac{d\nu}{d\mu}$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\kappa(A) = \nu(A) - \int_A f d\mu.$$

Alors κ est une mesure positive absolument continue par rapport à μ. La démonstration sera finie une fois qu'on aura établi que κ est identiquement nulle. Si ce n'était pas le cas, d'après le point iii) de la proposition IV. 4.6, il existerait $A \in \mathcal{A}$ avec $\mu(A) > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que A soit positif pour la mesure à signe $\kappa - \varepsilon\mu$ donc pour tout $C \in \mathcal{A}$ on aurait

(IV.6)
$$\nu(C \cap A) \geq \int_{C\cap A} f d\mu + \varepsilon\mu(C \cap A).$$

Comme $f \in \mathcal{F}$, nous aurons aussi

(IV.7)
$$\nu(C - A) \geq \int_{C-A} f d\mu.$$

En sommant membre à membre (IV.6) et (IV.7) on obtient

$$\nu(C) \geq \int_C f d\mu + \varepsilon\mu(C \cap A) \\ = \int_C f d\mu + \int_C \varepsilon 1_A d\mu \\ = \int_C (f + \varepsilon 1_A) d\mu.$$

Donc $f + \varepsilon 1_A \in \mathcal{F}$. Mais

$$\int_\Omega (f + \varepsilon 1_A) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \varepsilon\mu(A) \\ = \delta + \varepsilon\mu(A) \\ > \delta$$

qui contredit l'égalité (IV.5). Donc κ est identiquement nulle et par suite $\nu = f \cdot \mu$. L'unicité de f à μ-équivalence près se vérifie très facilement.

ii) μ et ν positives et σ-finies.

Dans cette situation on peut trouver une suite $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ d'éléments deux à deux disjoints dans $\mathcal{A}$ de réunion égale à Ω et tels

$$\mu(\Omega_n) < +\infty \text{ et } \nu(\Omega_n) < +\infty \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{A}$ induit une tribu $\mathcal{A}_n$ sur Ω_n ; on restreint à $\mathcal{A}_n$ les deux mesures μ et ν ; on obtient alors deux mesures bornées μ_n et ν_n pour lesquelles on a encore la propriété "ν_n absolument continue par rapport à μ_n". D'après le point i) il existe une fonction mesurable f_n définie sur Ω_n telle que $\nu_n = f_n \cdot \mu_n$. On prolonge f_n à Ω en décrétant qu'elle vaut 0 sur $\Omega - \Omega_n$; on obtient ainsi une fonction mesurable $\widetilde{f}_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et on vérifie facilement que la fonction

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n$$

est mesurable, positive et telle que $\nu = f \cdot \mu$.

iii) μ et ν sont à signe et σ-finies.

Dans ce cas on applique le point ii) respectivement aux paires de mesures positives σ-finies

$$\mu^+ \text{ et } \nu^+$$

et

$$\mu^- \text{ et } \nu^-$$

et on obtient le résultat cherché. □

Nous terminons ce chapitre par des exemples d'application des théorèmes que nous avons énoncés.

5. Exemples

5.1. Calcul de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dy$$

où $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{-ax^2}$ est continue (de classe C^∞ même) ; elle est intégrable et on peut prendre l'intégrale au sens de Riemann. Pour la calculer nous allons utiliser le théorème de Fubini d'une part et la formule de changement de variable d'autre part. On passera par la fonction positive intégrable $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = e^{-a(x^2+y^2)}$. D'après le théorème de Fubini on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2}dy = I^2.$$

Il suffit donc de calculer l'intégrale de h pour avoir la valeur de I. Nous restreindrons h à l'ouvert

$$E = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) \;:\; x \in [0,+\infty[\}.$$

dont le complémentaire est de mesure nulle. Soit Ω l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ et considèrons la transformation

$$f:(r,\theta)\in\Omega\longrightarrow(x,y)\in E$$

définie par

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

Cette transformation est un difféomorphisme (de classe C^∞) de l'ouvert Ω sur l'ouvert E dont la matrice jacobienne au point (r,θ) est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et qui a pour déterminant jacobien $\Delta(f)(r,\theta)=r$. La formule du changement de variable nous donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)dxdy &= \int_E h(x,y)dxdy \\ &= \int_\Omega e^{-ar^2}rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_0^{+\infty} re^{-ar^2}dr \\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{2a}e^{-ar^2}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{a}.\end{aligned}$$

Par suite

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

5.2. Calcul de l'intégrale

$$I_n=\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dy$$

avec $a>0$ et $n\in\mathbb{N}$. Remarquons d'abord que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale I_n existe. Reste juste à calculer sa valeur. Le cas $n=0$ a été fait en IV. 5.1. Nous supposerons $n\geq 1$ et on fera le calcul de proche en proche en commençant par $n=1$. On pose $F(a,x)=e^{-ax^2}$; on obtient ainsi une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ qui est telle que

– pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, $F(a,\cdot):x\in\mathbb{R}\longrightarrow F(a,x)\in\mathbb{R}$ est intégrable ;

– pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(\cdot,x):a\in\mathbb{R}_+^*\longrightarrow F(a,x)\in\mathbb{R}$ est dérivable et sa dérivée $F'_a(\cdot,x)$ est égale à $-x^2e^{-ax^2}$; cette dérivée vérifie en plus l'inégalité

$$|F'_a(\cdot, x)| \leq g(x)$$

où $g(x) = x^2 e^{-\tau x^2}$ (avec $\tau = \frac{a}{2}$) qui est une fonction intégrable.

D'après le théorème III. 5.2, la fonction

$$I_0 = I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(a, x) dx$$

est dérivable en a et sa dérivée est égale à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(-x^2 e^{-ax^2}\right) dx.$$

Ceci donne donc

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI}{da} = -\frac{d}{da}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En répétant ce raisonnement on montre facilement que I_n vaut

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n} \left(\frac{\pi}{a^{2n+1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En usant du même type de méthodes, le lecteur peut montrer que l'intégrale

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx$$

vaut

$$\frac{n!}{2} \frac{1}{a^{n+1}}.$$

5.3. Encore un exemple

Sur le demi-plan supérieur (qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$)

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0\}$$

on considère la mesure $\mu = \frac{1}{y^2}\lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Nous allons calculer l'aire (au sens de cette mesure) du domaine (voir figure qui suit)

$$\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{H} \ : \ x^2 + y^2 > 1 \text{ et } -1 < x < +1\}.$$

Cela revient à calculer l'intégrale

$$A = \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{y^2} dx dy.$$

Comme la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{D} \longrightarrow \frac{1}{y^2}$ est positive, le théorème de Fubini (ou plutôt la version pour les fonctions positives intégrables ou non) nous donne

$$A = \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{y^2} dxdy = \int_{-1}^{+1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx$$

c'est-à-dire $A = \int_{-1}^{+1} \left(\left[-\frac{1}{y} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \right) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\operatorname{Arc}\sin x]_{-1}^{+1} = \pi.$

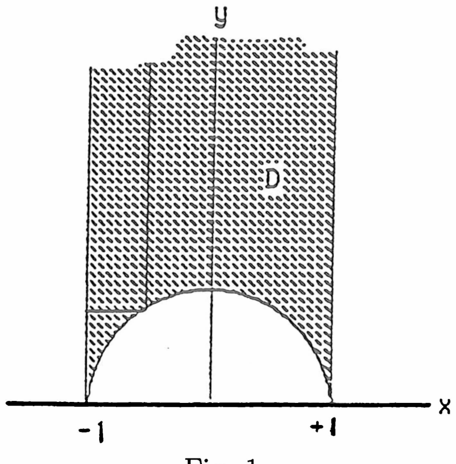


Fig. 1

6. Exercices

6.1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable. On pose $N = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = +\infty\}$.

i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mu(N) \leq \frac{1}{n} \int_\Omega f d\mu$.

ii) En déduire que f est presque partout finie.

Soit φ_n une suite croissante de fonctions étagées positives sur Ω. On pose

$$M = \{\omega \in \Omega \ : \ \lim \varphi_n(\omega) = +\infty\}$$

et

$$I = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_M \varphi_n d\mu.$$

iii) Montrer que $\mu(M) = 0$ si, et seulement si, $I < +\infty$.

6.2. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ où m est la mesure de comptage

$$m(A) = \begin{cases} \text{cardinal}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_1 = \omega_2, \\ -1 & \text{si } \omega_1 = 2i+1 \text{ et } \omega_2 = 2i+2, \\ & \text{ou si } \omega_1 = 2i+2 \text{ et } \omega_2 = 2i+1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrer que le théorème de Fubini ne s'applique pas à cette fonction. Ce qui montrera que l'intégrabilité de f est essentielle (et non pas uniquement celle des fonctions f_{ω_1} et f_{ω_2}).

6.3. Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, strictement croissante et telle que

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \phi(0) = 0.$$

i) Montrer que ϕ est bijective et qu'elle admet un inverse $\phi^{-1} = \psi$.

Pour tout $x \geq 0$ on pose $\Phi(x) = \int_0^x \phi(u)du$ et $\Psi(x) = \int_0^x \psi(u)du$.

ii) Montrer que $\forall a, b \in [0, +\infty[$ on a $ab \leq \Phi(a) + \Psi(b)$ (inégalité de Young) et que l'égalité a lieu si, et seulement si, $b = \phi(a)$.

iii) Appliquer ces résultats à la fonction $\phi(x) = x^{p-1}$ pour montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ $p > 1$ et $q > 1$ avec $1/p + 1/q = 1$ on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

6.4. Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$.

i) Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\varphi \in \mathcal{L}^p$.

ii) Montrer que la fonction

$$p \in [1, +\infty[\stackrel{N_p}{\longrightarrow} ||\varphi||_p \in \mathbb{R}_+$$

est croissante (au sens large). (Soient $1 \leq t < s$ et r tels que $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = \frac{1}{t}$ qui donne $\frac{t}{s} + \frac{t}{r} = 1$. Appliquer alors l'inégalité de Hölder aux fonctions $f = |\varphi|^t$ et $g = 1$ et aux nombres conjugués $p = \frac{s}{t}$ et $q = \frac{r}{t}$).

iii) Montrer que la fonction N_p est continue. (Soit $p_0 \in [1, +\infty[$. Remarquer que

$$\lim_{p \to p_0} |\varphi|^p = |\varphi|^{p_0} \quad \text{et} \quad |\varphi|^{p_0} \leq \sup\{1, |\varphi|^{p_0}\}$$

et appliquer le théorème de la convergence dominée.)

CHAPITRE V
Espaces vectoriels topologiques

On a souvent besoin, sur un espace vectoriel E, d'une notion de proximité. Pour l'avoir il faut définir sur E des topologies et de préférence celles qui se comportent bien avec les structures linéaire et affine de l'espace. Les *espaces vectoriels topologiques* (ou e.v.t. en abrégé) répondent à cette attente. Dans ce chapitre nous en donnons la définition et divers exemples ; l'accent sera mis beaucoup plus sur les espaces normés dans lesquels nous avons restreint l'étude des familles sommables. Les espaces L^p (avec $1 \leq p \leq +\infty$) sont décrits en détail dans le "paragraphe exercices".

1. Généralités

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On suppose E muni d'une topologie $\mathcal{T}$. (Le corps $\mathbb{K}$ qui sera tout le temps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est muni de sa topologie usuelle.)

1.1. Définition. *On dit que* $(E, \mathcal{T})$ *est un* **espace vectoriel topologique** *si les applications naturelles*

i) $(x, y) \in E \times E \longrightarrow x + y \in E$

ii) $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \longrightarrow \lambda x \in E$

sont continues (les ensembles $E \times E$ *et* $\mathbb{K} \times E$ *étant respectivement munis des topologies produit).*

De cette définition on tire immédiatement les conséquences suivantes :

i) *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, *l'application linéaire* $x \in E \longrightarrow \lambda x \in E$ *est continue ; par suite l'application* $(x, y) \in E \times E \longrightarrow x - y \in E$ *est continue.*

ii) Si $a \in E$ *et* U *un ouvert de* E *alors* $a + U$ *et* λU *(où* $\lambda \in \mathbb{K}^*$*) sont des ouverts de* E.

iii) Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire de E dans un e.v.t F alors f *est continue sur* E *si, et seulement si, elle est continue à l'origine.*

La propriété ii) signifie en particulier qu'à une translation convenable près les ouverts peuvent être considérés comme contenant l'origine 0 ; ce qui permet de ramener au voisinage de 0 l'étude de beaucoup de propriétés de E. Un voisinage U de 0 est dit *équilibré*, si pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $|\lambda| \leq 1$, on a $\lambda U \subset U$. *Dans un e.v.t tout voisinage* V *de* 0 *contient un voisinage équilibré* : en effet l'application $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ étant continue il existe $\varepsilon > 0$ et un ouvert W contenant 0 tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq \varepsilon$ on ait $\lambda W \subset V$. L'ensemble

$$U = \bigcup_{|\lambda| \leq \varepsilon} \lambda W$$

est alors un ouvert équilibré contenu dans V.

Le produit cartésien de deux e.v.t. muni de la topologie produit est un e.v.t.

Une propriété importante des e.v.t (à laquelle on est habitué dans les espaces numériques $\mathbb{K}^n$) dit que si on se donne un voisinage U de 0 dans E, alors on peut recouvrir n'importe quel compact de E par un homothétique de U ; plus précisément on a la

1.2. Proposition. *Soient E un e.v.t, U un voisinage ouvert équilibré (ceci n'est pas une restriction) de 0 et C un compact. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel $C \subset \lambda U$.*

Démonstration. : Remarquons d'abord que si λ_n est une une suite dans $\mathbb{K}$ telle que $(|\lambda_n|)$ tende vers l'infini, alors $E = \bigcup_n \lambda_n U$. En effet soit $x \in E$; alors la suite $\left(\frac{1}{\lambda_n}x\right)$ tend vers 0 et donc pour n assez grand $\left(\frac{1}{\lambda_n}x\right) \in U$; par suite $x \in \lambda_n U$.

Supposons maintenant la conclusion de la proposition fausse. Alors Il existe une suite de nombres λ_n avec $|\lambda_n|$ croissante et tendant vers $+\infty$ tels que aucun des $\lambda_n U$ ne contienne C, c'est-à-dire $C - \lambda_n U$ est non vide. D'autre part $C - \lambda_n U$ est compact ; comme la suite (de compacts) $(C - \lambda_n U)_n$ est décroissante (car $(\lambda_n U)_n$ est croissante) l'intersection $\bigcap_n (C - \lambda_n U)$
est non vide. Ce qui est absurde puisque cette intersection est égale à $C - E$ qui est vide. La proposition est donc démontrée. □

A l'aide de cette proposition on peut démontrer le

1.3. Théorème de Riesz. *Un e.v.t E séparé et localement compact est de dimension finie.*

Démonstration. Comme E est localement compact 0 admet un voisinage ouvert U équilibré *relativement compact* (l'adhérence $\overline{U}$ est compacte). Considérons le recouvrement de l'adhérence $\overline{U}$ par les ouverts $(U_x)_{x \in U}$ de la forme $x + \frac{1}{2}U$; de ce recouvrement on peut extraire un recouvrement fini $(U_{x_i})_{1 \leq i \leq k}$ puisque $\overline{U}$ est compact. Les vecteurs $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ engendrent un sous-espace vectoriel F de dimension finie $\leq k$. On a alors

- $U \subset F + \frac{1}{2}U$ de manière évidente ; d'autre part
- $U \subset F + \frac{1}{2}U \subset F + \frac{1}{2}(F + \frac{1}{2}U) = F + \frac{1}{2^2}U$; en répétant le procesus on obient de manière générale pour tout entier n

$$U \subset F + \frac{1}{2^n}U \qquad \text{(V.1)}$$

Nous allons montrer que $E = F$. Soient $x \in U$, V un voisinage ouvert quelconque de x et posons $V_0 = \{z \in E : z = y - x \text{ avec } y \in V\}$. Comme $\overline{U}$ est compact d'après la proposition V. 1.2. il existe un entier n tel que $\frac{1}{2^n}\overline{U} \subset V_0$; par suite $x + \frac{1}{2^n}\overline{U} \subset x + V_0$. On a d'autre part d'après (V.1)

$$F \cap \left(x + \frac{1}{2^n}U\right) \neq \emptyset.$$

Donc $V \cap F \neq \emptyset$; par suite $x \in \overline{F}$; mais comme F est fermé (car de dimension finie dans un e.v.t séparé) $x \in F$; donc $U \subset F$; F étant un sous-espace vectoriel pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda U \subset F$. Par suite

$$E = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}} \lambda U \subset F.$$

On en déduit alors que $E = F$; ce qui démontre le théorème. □

Les exemples d'e.v.t. sont assez diversifiés ; nous nous limiterons à ceux dont la topologie est définie par une suite de semi-normes, par une norme ou par un produit scalaire. Le but des sections qui suivent est de faire le tour de ces exemples. Le dernier qui est assez particulier aura droit à un chapitre spécifique que nous développerons ultérieurement.

2. E.V.T. localement convexes

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1. Définition. *On appelle* **semi-norme** *sur E toute application p de E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que*

i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$;

ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in E$.

Si en plus la relation $p(x) = 0$ implique $x = 0$ pour tout $x \in E$, on dira que p est une **norme** *sur E.*

Soient $x \in E$ et r un réel positif. Le sous-ensemble

$$B_p(x, r) = \{y \in E : p(x - y) < r\}$$

de E est appelé *p-boule ouverte* de centre x et de rayon r. On vérifie facilement que toute p-boule est *convexe* (*cf.* VI. 3 pour la définition).

Soit $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes sur E. On suppose que pour toute partie finie $J \subset I$, $\sup_{j \in J} p_j \in \mathcal{P}$ (on dira que $\mathcal{P}$ est *stable par enveloppe supérieure finie*). Ceci est le cas si, par exemple, $\mathcal{P}$ est une suite croissante de semi-normes sur E. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties U de E vérifiant la propriété

$$\text{(V.2)} \qquad \forall x \in U, \ \exists i \in I, \ \exists r > 0 \ : \ B_{p_i}(x, r) \subset U$$

2.2. Théorème. *$(E, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique.*

Démonstration. Commençons par montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E. Il est immédiat que $\emptyset, E \in \mathcal{T}$ et que toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ est encore un élément de $\mathcal{T}$. Soit $(U_k)_{k=1,\dots,n}$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}$, posons $U = \bigcap U_k$ et considérons un point $x \in U$. Alors pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ il existe $i_k \in I$ et $r_k > 0$ tels que $B_{p_{i_k}}(x, r_k) \subset U$. Posons $p = \max_k p_{i_k}$ et $r = \inf_k r_k$; il est alors évident que la p-boule $B_p(x, r)$ est contenue dans U. Ce qui montre que $U \in \mathcal{T}$; $\mathcal{T}$ est donc une topologie sur E.

Reste à montrer que pour cette topologie les applications

$$(x, y) \in E^2 \xrightarrow{s} x + y \in E$$

$$(\lambda; x) \in \mathbb{K} \times E \xrightarrow{m} \lambda x \in E$$

sont continues. Soit U un ouvert de E pour $\mathcal{T}$; considérons un élément $(x, y) \in E^2$ tel que $z = x + y \in U$. On sait qu'il existe $i \in I$ et $r > 0$ tels que

$$B_{p_i}(z, r) \subset U.$$

On vérifie facilement que $B_{p_i}(x, \frac{r}{3}) \times B_{p_i}(y, \frac{r}{3})$ est contenu dans $s^{-1}(U)$. Ce qui montre que $s^{-1}(U)$ est un ouvert de $E \times E$ (pour la topologie produit).

Soit maintenant $(\lambda, x) \in m^{-1}(U)$ et posons $z = \lambda x$. Il existe $i \in I$, et $r > 0$ tels que

$$B_{p_i}(z, r) \subset U.$$

On veut montrer l'existence de $j \in I$, $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$m\left(D(\lambda, \alpha) \times B_{p_j}(x, \rho)\right) \subset U.$$

où $D(\lambda, \alpha)$ est la boule ouverte dans $\mathbb{K}$ de rayon α et de centre λ. On vérifie facilement que $j = i$, que tout $\alpha < \frac{r}{2p_i(x)}$ et $\rho = \frac{r}{2(|\lambda|+\alpha)}$ conviennent. □

Un e.v.t. dont la topologie est définie par une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes stable par enveloppe supérieure finie est dit *localement convexe.* Cette appellation est justifiée par le fait que tout point admet un système fondamental de voisinages convexes en l'occurrence les p-boule ouvertes centrée en ce point où $p \in \mathcal{P}$. Un tel espace sera noté $(E, \mathcal{P})$. Lorsque la famille $\mathcal{P}$ est réduite à une semi-norme p on dira que (E, p) est un e.v.t. *semi-normé* ; mais hélas de tels espaces ne sont jamais séparés si la semi-norme p n'est pas une norme.

On dira qu'une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sur E est *séparante* si

$$(p(x) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}) \Longrightarrow x = 0.$$

Dans ce cas l'e.v.t. E est séparé.

La proposition suivante est facile à établir ; elle montre l'intérêt pratique des semi-normes sur un e.v.t. localement convexe.

2.3. Proposition. *Soit E un e.v.t. localement convexe dont la topologie est définie par une famille séparante de semi-normes $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$ stable par enveloppe supérieure finie. Une suite $(x_n)_n$ de E converge vers 0 si, et seulement si, pour tout $i \in I$, $p_i(x)$ tend vers 0.*

Dans toute la suite les e.v.t. localement convexes que l'on considérera auront leur topologie définie par une suite séparante et croissante (donc stable par enveloppe supérieure finie) de semi-normes.

Soit (E, p_n) un tel espace. Alors il existe sur E une distance d qui définit sa topologie. Il suffit de poser

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \inf(1, p_n(x - y))$$

ou bien

$$d(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

Ces deux distances sont invariantes par translation *i.e.*

$$\forall x,y,a\in E \;\; d(x+a,y+a)=d(x,y).$$

On dira que E est un *e.v.t. localement convexe métrisable.* On appelle *espace de Fréchet* tout e.v.t. localement convexe métrisable complet.

2.4. Définition. *Un e.v.t. E est appelé* **espace normé** *si sa topologie est définie par la distance d associée à une norme* $\|\ \|$ *i.e.* $d(x,y)=\|x-y\|$. *Un espace de Banach est un espace normé complet.*

Tout espace de Banach est un espace de Fréchet. Le produit cartésien d'un nombre fini d'espaces de Fréchet (resp. de Banach) muni de la topologie produit est un espace de Fréchet (resp. de Banach).

Soit E un e.v.t. métrisable (par une métrique d invariante par translation) que nous fixerons tout le long de cette section. Notons $\widehat{E}$ son complété en tant qu'espace métrique. Alors si

- E est localement convexe, $\widehat{E}$ est aussi localement convexe et donc un espace de Fréchet,
- E est normé, alors $\widehat{E}$ est aussi normé et est donc un espace de Banach.

Si V est un sous-espace vectoriel de E alors V, muni de la topologie induite, est un e.v.t. Son adhérence $\overline{V}$ est un sous-espace v.t. de E. Si E est de Fréchet, alors tout sous-espace vectoriel fermé de E est aussi de Fréchet.

Si A est une partie de E, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels fermés contenant A est un sous-espace vectoriel fermé appelé *sous-e.v.t. engendré* par A.

L'espace E/V peut être muni d'une structure d'espace vectoriel topologique : par définition un ouvert de E/V est l'image directe par la projection canonique $\pi : E \longrightarrow E/V$ d'un ouvert de E. C'est donc la topologie la plus fine sur E/V pour laquelle l'application π est continue.

2.5. Proposition. *Supposons V fermé. Alors*

i) si E est métrisable, E/V est métrisable ;
ii) si E est localement convexe, E/V est aussi localement convexe ;
iii) si E est normé alors E/V est normé ;
iv) si E est complet, E/V est complet.

Démonstration. i) Soient $X,Y\in E/V$; alors X et Y sont deux classes d'équivalence modulo V dans E. On pose

$$\overline{d}(X,Y)=\inf_{x\in X,y\in Y} d(x,y) \qquad \text{(V.3)}$$

qui est une distance sur E/V. En effet $\overline{d}$ s'écrit aussi

$$\overline{d}(X,Y) = \inf_{v \in V} d(x, y+v)$$

i.e. $\overline{d}(X,Y)$ est la distance de Y à n'importe quel point x de X. Ceci permet de montrer de manière presque immédiate que $\overline{d}$ vérifie les axiomes d'une distance invariante par translation. On vérifie facilement que $\overline{d}$ définit la topologie d'e.v.t. sur E/V qu'on vient de considérer.

ii) Soit $(p_n)_n$ une suite croissante de semi-normes sur E définissant sa topologie. Alors

$$\overline{p}_n(X) = \inf_{x \in X} p_n(x) \tag{V.4}$$

est une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de E/V.

iii) Soit $|| \ ||$ la norme sur E. Pour en définir une sur E/V il suffit de poser

$$||X|| = \inf_{x \in X} ||x||. \tag{V.5}$$

iv) On démontre ce point dans le cas où E est normé ; le cas métrique non normé se traite de la même manière. Soit $(X_m)_m$ une suite de Cauchy dans E/V. On peut en extraire une suite $(X_{m_k})_k$ telle que

$$||X_{m_k} - X_{m_{k+1}}|| < \frac{1}{2^k}.$$

En utilisant la définition de la norme $|| \ ||$ sur E/V à partir de celle $|| \ ||$ sur E on peut trouver dans chacun des X_{m_k} un élément x_k tel que

$$||x_k - x_{k+1}|| < \frac{1}{2^k}.$$

La suite $(x_k)_k$ ainsi construite est de Cauchy dans E ; elle y converge donc vers un élément x. Posons $X = \pi(x)$. Comme $||X_{m_k} - X|| \leq ||x_k - x||$ la suite X_{n_k} converge bien vers X. Par suite $(X_m)_m$ converge vers X dans E/V *i.e.* E/V est complet. □

3. Séries et familles sommables

Dans ce paragraphe nous allons donner la notion de *série convergente, commutativement convergente* et celle de *famille sommable* dans un espace normé. La troisième notion est une généralisation naturelle de la deuxième : on donne un sens à la notion de somme d'une famille indexée par un ensemble qui n'est pas forcément dénombrable. On étudiera en particulier le cas où l'espace est complet. Nous fixerons donc un espace normé $(E, || \ ||)$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on pose $S_N = x_0 + x_1 + \ldots + x_N$. On dira que la série de terme général x_n (ou simplement la série x_n) *converge vers* $S \in E$ si la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $S \in E$ (au sens de la norme $|| \ ||$ bien sûr). Le vecteur S est appelé *somme* de la série ; on écrit

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

On dira que la série (x_n) est *normalement convergente* si la série des nombres réels $||x_n||$ est convergente au sens usuel. Une série convergente sans être normalement convergente est dite *semi-convergente.*

3.1. Proposition. *Supposons E complet. Alors toute série normalement convergente est convergente et on a*

$$\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right|\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||x_n||.$$

Démonstration. Comme la série converge normalement, la suite de nombres réels $\alpha_N = \sum_{n=0}^{N} ||x_n||$ est de Cauchy ; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \geq p \geq N_0 \Longrightarrow |\alpha_n - \alpha_p| \leq \varepsilon.$$

D'où $||x_{p+1} + \ldots + x_n|| \leq \varepsilon$ pour $n \geq p \geq N_0$; on en déduit que la suite $S_N = x_0 + \ldots + x_N$ est de Cauchy ; elle converge donc puisque E est complet. L'inégalité

$$\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right|\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||x_n||$$

découle du fait que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $||\sum_{n=0}^{N} x_n|| \leq \sum_{n=0}^{N} ||x_n||$. □

L'hypothèse *E est complet* est en fait nécessaire comme on peut le montrer dans la proposition qui suit.

3.2. Proposition. *On suppose que toute série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ normalement convergente est convergente. Alors E est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, m \geq n_k \Longrightarrow ||x_n - x_m|| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Considérons la suite des entiers n_k (qu'on peut supposer strictement croissante). La norme de la série $x_{n_0} + \sum_{k=0}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ est majoré par la série convergente $||x_{n_0}|| + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$; elle converge donc en vertu de l'hypothèse faite sur E. Mais comme

$$S_N = x_{n_0} + \sum_{k=0}^{N}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_N}$$

la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. On a donc montré que la suite de Cauchy x_n admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$; elle est donc convergente *i.e.* E est complet. □

3.3. Définition. *On dira qu'une série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est* **commutativement convergente** *si pour toute bijection* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ *est convergente vers une limite* S *indépendante de* σ.

La proposition qui suit, que nous ne démontrerons pas, donne des conditions suffisantes pour qu'une série convergente soit commutativement convergente.

3.4. Proposition. *Si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est à la fois convergente et normalement convergente, alors elle est commutativement convergente. Si* E *est de dimension finie, la convergence commutative de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *implique sa convergence normale.*

Nous allons maintenant passer au cas des familles $(x_i)_{i\in I}$ indexées par un ensemble I non forcément dénombrable dont on notera $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des parties finies. Pour $J \in \mathcal{F}(I)$ on pose $S_J = \sum_{j\in J} x_j$.

3.5. Définition. *Une famille* $(x_i)_{i\in I}$ *est dite* **sommable** *de somme* $S \in E$ *si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $J(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)$ *telle que pour tout* $J \in \mathcal{F}(I)$ *on ait*

$$J(\varepsilon) \subset J \Longrightarrow ||S - S_J|| \leq \varepsilon.$$

On écrira alors

$$x = \sum_{i\in I} x_i \text{ ou } x = \lim_{J\in\mathcal{F}} \sum_{i\in J} x_i.$$

L'unicité de la somme S de la famille $(x_i)_{i\in I}$ découle, comme dans le cas des séries, du fait que l'espace E étant normé est séparé. D'autre part les propriétés suivantes sont faciles à établir.

(1) Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables et α et β sont des scalaires alors la famille $(\alpha x_i + \beta y_i)_{i\in I}$ est aussi sommable.

(2) Soient F un autre espace normé, $\varphi : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable dans E ; alors la famille $y_i = \varphi(x_i)$ est sommable. Ceci découle du fait que pour tout $i \in I$ on a $||y_i|| \leq |||\varphi||| \cdot ||x_i||$ (où $|||\varphi||| = \sup_{||x||\leq 1} ||\varphi(x)||$)(*cf.* chapitre VI pour les applications linéaires continues et leurs normes).

3.6. Définition. *On dira que la famille* $(x_i)_{i\in I}$ *est* **de Cauchy** *si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie finie* $J(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)$ *telle que pour tout* $K \in \mathcal{F}(I)$ *on ait*

$$K \cap J(\varepsilon) = \emptyset \Longrightarrow ||S_K|| \leq \varepsilon.$$

On peut remarquer que si $(x_i)_{i\in I}$ est de Cauchy alors l'ensemble I_+ des indices $i \in I$ tels que $x_i \neq 0$ est au plus dénombrable. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit l'ensemble fini $J_n \in \mathcal{F}(I)$ tel que pour tout $K \in \mathcal{F}(I)$ on ait

$$K \cap J_n = \emptyset \Longrightarrow ||S_K|| \leq \frac{1}{n}.$$

En particulier pour $K = \{i\}$ avec $i \notin J_n$ on a $||x_i|| \leq \frac{1}{n}$; par suite $||x_i|| = 0$ si i n'appartient pas à la réunion I_+ des J_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ qui est une partie dénombrable de I (car réunion dénombrable de parties finies).

Le critère de Cauchy est bien entendu important puisqu'il permet de dire quand une famille est sommable sans en connaître la somme. Plus précisément on a le théorème qui suit.

3.7. Théorème. *Une condition nécessaire pour qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ dans E soit sommable est qu'elle soit de Cauchy. Cette condition devient suffisante si E est complet.*

Démonstration. Supposons (x_i) sommable de somme $S \in E$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $J_0 \in \mathcal{F}(I)$ telle que pour tout $J \in (I)$ on ait

$$J_0 \subset J \Longrightarrow ||S - S_J|| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $K \in (I)$ disjoint de J_0 ; alors

$$||S - S_{J_0}|| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad ||S - S_{J_0 \cup K}|| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $S_K = S_{J_0\cup K} - S_{J_0}$ on en déduit que $||S_K|| \leq \varepsilon$ qui montre bien que $(x_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy.

Supposons E complet et (x_i) vérifie le critère de Cauchy. Comme on l'a fait remarquer l'ensemble des $i \in I$ tels que $x_i \neq 0$ est au plus dénombrable ; supposons-le égal à $\mathbb{N}$. Le problème revient donc à la sommabilité d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n$; alors la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy ; elle converge donc vers un élément $S \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $J \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ tel que pour tout $L \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ disjoint de J on ait $||S_L|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et un entier N_0 tel que $N \geq N_0 \Longrightarrow ||S - S_N|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $K \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ contenant J il existe un entier $N \geq N_0$ tel que $K \subset \{0, 1, \ldots, N\}$; par suite $\{0, 1, \ldots, N\} - K$ est disjoint de J. Ce qui entraine

$$||S - S_K|| \leq ||S - S_N|| + ||S_N - S_K|| \leq \varepsilon.$$

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est donc sommable. □

3.8. Corollaire. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable dans E complet. Alors pour tout sous-ensemble $J \subset I$, la famille $(x_j)_{j\in J}$ est sommable.*

Supposons que I est une réunion disjointe d'ensembles I_λ, $\lambda \in \Lambda$. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille dans E.

3.9. Théorème (sommation par paquets). *Supposons E complet et $(x_i)_{i\in I}$ sommable de somme S. Si S_λ est la somme de la famille $(x_i)_{i\in I_\lambda}$, la famille $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable de somme S.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(x_i)_{i\in I}$ est sommable il existe un sous-ensemble $J(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)$ tel que pour $K \in \mathcal{F}(I)$ on ait

$$J(\varepsilon) \subset K \Longrightarrow ||S - S_K|| \leq \varepsilon.$$

On pose

$$H(\varepsilon) = \{\lambda \in \Lambda : I_\lambda \cap J(\varepsilon) \neq \emptyset\}.$$

Alors $H(\varepsilon)$ est un sous-ensemble fini de Λ (puisque les I_λ sont disjoints). Soit $H \in \mathcal{F}(\Lambda)$ contenant $H(\varepsilon)$; comme pour tout $\lambda \in \Lambda$ la famille $(x_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable pour tout $\eta > 0$ il existe $M(\lambda, \eta)$ partie finie de I_λ telle que pour $M \in \mathcal{F}(I_\lambda)$ on ait

$$M(\lambda,\eta) \subset M \Longrightarrow ||S_\lambda - S_M|| \leq \eta.$$

Posons

$$J_\lambda = (J(\varepsilon) \cap I_\lambda) \cup M(\lambda, \eta) \text{ et } J = \bigcup_{\lambda \in H} J_\lambda.$$

Alors les J_λ sont des parties deux à deux disjointes ; d'ou $S_J = \sum_{\lambda\in H} S_{J_\lambda}$. D'autre part on a $||S_\lambda - S_{J_\lambda}|| \leq \eta$ et comme $J(\varepsilon) \subset J$ on a $||S - S_J|| \leq \varepsilon$. Par suite

$$\left\|S - \sum_{\lambda\in H} S_\lambda\right\| \leq \varepsilon + (\text{cardinal de } H)\eta.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout η et que son premier membre n'en dépend pas, en faisant tendre η vers 0 on obtient

$$\left\|S - \sum_{\lambda\in H} S_\lambda\right\| \leq \varepsilon$$

pour tout $H \in \mathcal{F}(\Lambda)$ contenant $H(\varepsilon)$. Ce qui montre bien que la famille $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable de somme S. □

4. Quelques exemples concrets d'E.V.T.

4.1. Les espaces de Banach

i) Tout espace E de dimension finie égale à n est isomorphe (via le choix d'une base) à $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Sur un tel espace on peut définir plusieurs normes toutes équivalentes qui en font un espace de Banach ; donnons en deux :

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{avec } p \in [1, +\infty[$$

$$||x||_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Sur un espace E de dimension finie il n'existe qu'une et une seule structure d'e.v.t. séparé : celle définie par une quelconque de toutes les normes qu'on peut définir sur E.

Ce fait est important ; il n'est pas immédiat mais il n'est pas difficile à établir : la démonstration se fait en usant d'une récurrence sur la dimension de E.

ii) Soit (X, d) un espace métrique compact ; alors l'ensemble $E = C(X, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues muni de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

est un espace de Banach.

iii) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré ; alors pour tout $p \geq 1$ l'espace $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ des classes (modulo l'égalité μ-presque partout) de fonctions de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable muni de la norme

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(\omega)|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach (voir exercice V. 5.2 pour les démonstrations).

Si $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mu = m$ (la *mesure de comptage* sur $\mathbb{N}$ *i.e.* $m(A) =$ cardinal de A si A est fini et $+\infty$ sinon) alors $L^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ n'est rien d'autre que l'espace de Banach, que l'on note habituellement ℓ^p, des suites réelles de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable.

4.2. Les espaces de Fréchet

Ils constituent un outil principal en analyse et en géométrie. Nous donnerons un des plus importants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $C^n(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles de classe C^n sur $\mathbb{R}$ (*i.e.* les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ la dérivée $f^{(r)}$ d'ordre r de f est continue). Soit (K_m) une suite de compacts dont la réunion recouvre $\mathbb{R}$ et tels que K_m soit contenu dans l'intérieur de K_{m+1} (on dira que (K_m) est une *suite exhaustive* de compacts de $\mathbb{R}$). Pour $f \in C^n(\mathbb{R})$ on pose

$$p_m(f) = \sum_{r=0}^{n} \sup_{x \in K_m} |f^{(r)}(x)|.$$

Alors (p_m) est une suite séparante et croissante de semi-normes sur $C^n(\mathbb{R})$ qui en fait un espace de Fréchet.

Démonstration. Le fait que p_m soit une suite de semi-normes et qu'elle soit croissante est évident. Si $p_m(f) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, alors la restriction de f à tout compact K_m est nulle, donc f est nulle sur leur réunion qui est $\mathbb{R}$; par suite f est identiquement nulle. La suite $(p_m)_m$ est donc séparante. Cette suite de semi-normes définit une topologie sur $C^n(\mathbb{R})$. On vérifie facilement que cette topologie est indépendante de la suite exhaustive de compacts choisie pour la définir : en effet si (K'_ℓ) est une autre suite exhaustive de compacts de $\mathbb{R}$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que K_m soit contenu dans l'intérieur de K'_ℓ ; si on note (p'_ℓ) la suite de semi-normes associée à la suite (K'_ℓ) on aura

$$p_m(f) \leq p'_\ell(f)$$

pour toute fonction de $C^n(\mathbb{R})$. Donc toute p_m-boule ouverte est contenue dans une p'_ℓ-boule ouverte. De la même manière on montrerait que toute p'_ℓ-boule ouverte est contenue dans une p_m-boule ouverte. Autrement dit la topologie définie par la suite $(p_m)_m$ est la même que celle définie par la suite (p'_ℓ).

Reste à montrer que $C^n(\mathbb{R})$ est complet. Pour le faire on peut donc choisir n'importe quelle suite exhaustive de compacts K_m. Soit (f_s) une suite de Cauchy dans cet espace. Pour tout $r \in \{0, \ldots, n\}$ et tout compact K_m la suite $g_s^r = f_s^{(r)}{}_{|K}$

est de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme des fonctions continues sur K_m. Elle converge donc vers une fonction continue sur K_m ; comme ceci est vrai pour tout m la suite $(f_s^{(r)})_s$ converge vers une fonction continue g^r sur $\mathbb{R}$.

Soient toujours $r \in \{0, \dots, n-1\}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de x_0

$$f_s^{(r)}(x) - f_s^{(r)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_s^{(r+1)}(t)dt.$$

Par passage à la limite sur s on obtient

$$g^r(x) - g^r(x_0) = \int_{x_0}^{x} g^{r+1}(t)dt.$$

On dérive alors g^r et on constate que $g^{r+1} = (g^r)'$. En prenant $r = 0$ et en itérant ce processus on trouve $(g^0)^{(r)} = g^r$. Ce qui montre que la suite f_s converge dans $C^n(\mathbb{R})$ vers la fonction $f = g^0$. Autrement dit $C^n(\mathbb{R})$ est complet, donc c'est un espace de Fréchet. □

Pour tout $n \in C^n(\mathbb{R})$ on a $C^{n+1}(\mathbb{R}) \subset C^n(\mathbb{R})$. On a donc une suite d'inclusions continues

$$\dots \hookrightarrow C^{n+1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow C^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R})$$

L'intersection de tous les espaces $C^n(\mathbb{R})$ pour n variant dans $\mathbb{N}$ n'est rien d'autre que l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. La topologie la moins fine rendant continues toutes les injections naturelles

$$C^\infty(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^n(\mathbb{R})$$

est appelée la C^∞-*topologie*. Une suite (f_s) converge vers une fonction f de classe C^∞ pour cette topologie si, et seulement si, pour tout compact K de $\mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{N}$ la restriction de $f_s^{(r)}$ à K converge uniformément (sur K) vers la restriction de $f^{(r)}$ à K. Cette topologie peut être définie par la suite croissante de semi-normes

$$p_m(f) = \sum_{r=0}^{m} \left(\sup_{x \in K_m} |f^{(r)}(x)| \right).$$

De façon analogue on peut définir l'espace de Fréchet des fonctions C^∞ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$.

5. Exercices

5.1. Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dira que f est *holomorphe* en $z \in U$, si la limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$, avec $h \neq 0$ et $h + z \in U$ existe. On dira que f est *holomorphe sur* U, si elle est holomorphe en tout point de U. Par l'identification $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow z = x + iy \in \mathbb{C}$ on peut voir f comme une fonction $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$. Supposons f différentiable en (x, y) et notons $df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ son application linéaire tangente en (x, y). Alors f est holomorphe en $z = (x, y)$ si, via l'identification

$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow z = x + iy \in \mathbb{C}$, l'application $\mathbb{R}$-linéaire $df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est en fait $\mathbb{C}$-linéaire. Ceci impose aux coefficients de la matrice de vérifier les relations $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ dites *conditions de Cauchy-Riemann.* Autre définition : f est holomorphe en z s'il existe $\rho > 0$ tel que le disque ouvert de centre z et de rayon ρ soit contenu dans U et pour tout w dans ce dique on ait un développement en série entière convergente $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w - z)^n$. Ce développement montre qu'une fonction holomorphe est analytique réelle et donc de classe C^∞.

On peut trouver toutes les définitions et propriétés des fonctions holomorphes dans n'importe quel ouvrage traitant des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes. Le livre [Ca] de H. Cartan est une excellente référence sur le sujet.

Dans $\mathbb{C}$ on considère la suite exhaustive de compacts $K_n = D(0, n)$ où $D(0, n)$ est le disque fermé de rayon $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$ on pose

$$p_n(f) = \sup_{z \in K_n} |f(z)|.$$

Montrer que l'espace vectoriel $\mathcal{H}$ des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ muni de cette suite de normes p_n est un espace de Fréchet.

Les espaces L^p ($p \in [1, +\infty[$) jouent un rôle fondamental. Nous allons les définir et donner leurs principales propriétés ; nous ferons cela sous forme de problèmes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et notons L^p l'ensemble des classes de fonctions réelles (on peut les supposer complexes aussi) mesurables de puissance $p^{\text{ème}}$ μ-intégrable sur Ω. C'est un espace vectoriel. En effet pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout élément f de L^p, $\alpha f \in L^p$. D'autre part la fonction $x \in \mathbb{R} \longrightarrow |x|^p$ étant convexe, on a pour tous $f, g \in L^p$

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

qui montre bien que $f + g \in L^p$. Pour $f \in L^p$ on pose

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous allons montrer que $|| \ ||_p$ est une norme sur l'espace vectoriel L^p qui en fait un espace Banach.

5.2. Espace L^p avec $1 \leq p < +\infty$

On suppose $p > 1$. Soient $q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et a et b deux nombres réels positifs.

i) Etablir l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

ii) En déduire que pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$, $fg \in L^1$ et on a l'inégalité (dite de Hölder)

$$||fg||_1 \leq ||f||_p||g||_q.$$

iii) Démontrer l'inégalité suivante (dite de Minkowski) valable pour tout $p \geq 1$.

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

iv) En déduire que $|| \quad ||_p$ est une norme sur L^p.

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p.

v) Montrer qu'on peut extraire de (f_n) une suite $(f_{n_k})_k$ telle que

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \frac{1}{2^k}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $h_k = |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$ et pour tout $\omega \in \Omega$, $h(\omega) = \lim_{k\to+\infty} h_k(\omega)$ (limite qui est finie ou infinie).

vi) Montrer que $||h_k||_p \to ||h||_p$ et que $h_k \in L^p$. En déduire que $h \in L^p$ et donc h est presque partout finie.

vii) Montrer que la suite $(f_{n_k})_k$ est presque partout convergente vers une fonction mesurable f.

(Remarquer que la série dont les termes sont $u_1 = f_{n_1}$ et $u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$ pour $k \geq 2$ a pour somme partielle $S_k = f_{n_k}$ et se rappeler qu'elle est absolument convergente (la limite est précisément h.)

viii) Démontrer que $(f_{n_k})_k$ converge vers f dans L^p.

(Appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $g_k = |f_{n_k} - f|^p$.)

5.3. Espace L^∞

Comme pour l'espace L^p avec $1 \leq p < +\infty$, nous étudierons L^∞ sous forme de problème.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute fonction mesurable f on pose

$$||f||_\infty = \inf\{\alpha : \alpha \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \text{et} \quad |f| \leq \alpha \quad \mu-\text{pp}\}$$

On dira que f est *μ-essentiellement bornée* si $||f||_\infty < +\infty$ et on note $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble de telles fonctions et $L^\infty = \mathcal{L}^\infty/\mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ est l'espace des fonctions mesurables nulles presque partout.

i) Montrer que $|| \quad ||_\infty$ est une norme sur L^∞.

ii) Soit $f \in L^\infty$. Montrer qu'il existe $E \in \mathcal{A}$ de mesure nulle tel que

$$||f||_\infty = \sup_{\omega\in\Omega-E} |f(\omega)|.$$

iii) Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle E.

iv) En déduire que (f_n) converge vers un élément $f \in L^\infty$ pour la norme $|| \quad ||_\infty$ et donc L^∞ est complet.

5.4. Soit $\mathcal{C}_0$ l'espace des suites complexes tendant vers 0 muni de la norme $||X||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Montrer que $\mathcal{C}_0$ est un espace de Banach.

CHAPITRE VI
Applications linéaires continues

Nous introduisons la notion d'application linéaire continue qui accompagne de façon naturelle celle d'espace vectoriel topologique. Diverses propriétés sont étudiées et les théorèmes fondamentaux sont démontrés : Banach-Schauder, graphe fermé, Hahn-Banach... Pour des raisons de simplicité, nous nous sommes limités aux espaces normés bien que la plupart des résultats restent vrais dans le cadre plus général des espaces vectoriels topologiques.

1. Généralités

Soient $(E, ||\ \ ||_E)$ et $(F, ||\ \ ||_F)$ deux espaces normés qu'on supposera fixés tout le long de cette section.

1.1. Proposition. *Une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est continue si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$,*

$$||u(x)||_F \leq \alpha ||x||_E. \tag{VI.1}$$

L'énoncé général dans le cas où (E, p_n) et (F, q_m) sont deux e.v.t. localement convexes avec (p_n) et (q_m) deux suites croissantes de semi-normes respectivement sur E et F serait :

Une application $u : E \longrightarrow F$ est continue si, et seulement si, pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ (dépendant en général de m) tel que , pour tout $x \in E$,

$$q_m(u(x)) \leq \alpha p_n(x) \qquad \forall x \in E. \tag{VI.2}$$

Démonstration. Supposons u continue ; elle est donc continue à l'origine *i.e.* si $x \to 0$ dans E, $u(x) \to 0$ dans F. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$||x||_E \leq \eta \Longrightarrow ||u(x)||_F \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in E$ non nul (pour $x = 0$ l'inégalité qu'on veut établir est évidente) ; alors on a

$$\left|\left| u\left(\eta \frac{x}{||x||_E}\right) \right|\right|_F \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire $||u(x)||_F \leq \frac{\varepsilon}{\eta}||x||_E$. Il suffit alors de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{\eta}$.

La condition (VI.1) est clairement suffisante pour la continuité de u. □

Il découle de la proposition VI. 1.1 qu'il y a équivalence entre : continuité en 0, uniforme continuité et condition de Lipschitz.

Comme F est séparé, le noyau $\mathrm{Ker} u = \{x \in E : u(x) = 0\}$ d'une application linéaire continue $u : E \longrightarrow F$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

L'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Comme toute application linéaire continue est bornée sur la boule unité (fermée) de E, $\mathcal{L}_c(E, F)$ peut être muni de la norme (le vérifier) :

$$(VI.3) \qquad |||u||| = \sup_{||x||_E \leq 1} ||u(x)||_F$$

ou encore $|||u||| = \sup_{x \neq 0} \frac{||u(x)||_F}{||x||_E}$.

Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application Φ définie sur $E_1 \times \ldots \times E_n$ et à valeurs dans F est dite *n-linéaire* si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tous $x_1 \in E_1, \ldots, x_{i-1} \in E_{i-1}, x_{i+1} \in E_{i+1}, \ldots, x_n \in E_n$ fixés, l'application $x_i \in E_i \longmapsto \Phi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in F$ est linéaire. Si $n = 2$, E_1 et E_2 sont un même espace E et $F = \mathbb{K}$, on dira que Φ est une *forme bilinéaire* sur E.

Soient $(E_1, || \ \ ||_1), \ldots, (E_n, || \ \ ||_n)$ et $(F, || \ \ ||_F)$ des espaces normés. On munit le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ de l'une des normes équivalentes suivantes $||x|| = \sum_{i=1}^n ||x_i||_i$ ou $||x|| = \sup_i \{||x_i||_i\}$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

1.2. Proposition. *Une application n-linéaire $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ est continue si, et seulement si, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ on ait $||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F \leq \alpha ||x_1||_1 \cdot \ldots \cdot ||x_n||_n$.*

Démonstration. Elle est presque la même que celle de la propositon VI. 1.1. □

Si $\Phi : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ est continue alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tous $x_1 \in E_1, \ldots, x_{i-1} \in E_{i-1}, x_{i+1} \in E_{i+1}, \ldots x_n \in E_n$ fixés, l'application partielle $\Phi_i : E_i \longrightarrow F$ définie par $\Phi_i(x_i) = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ est continue. La réciproque est vraie si l'un des E_i est de Banach (*cf.* exercice VI. 5.3).

On définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E_1, \ldots, E_n; F)$, espace vectoriel des applications n-linéaires continues de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F en posant

$$(VI.4) \qquad |||\Phi||| = \sup_{||x_1||_1 \leq 1, \ldots, ||x_n||_n \leq 1} ||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F$$

ou encore

$$|||\Phi||| = \sup_{x_1 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0} \frac{||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F}{||x_1||_1 \cdot \ldots \cdot ||x_n||_n}.$$

C'est le plus petit nombre $\alpha > 0$ vérifiant l'inégalité

$$||\Phi(x_1, \ldots, x_n)||_F \leq \alpha ||x_1||_1 \cdot \ldots \cdot ||x_n||_n.$$

On a aussi l'inégalité importante suivante : si $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ sont des applications linéaires continues entre espaces normés alors

$$\text{(VI.5)} \qquad |||v \circ u||| \leq |||u|||.|||v|||$$

On a en outre le résultat suivant dont la démonstration n'est pas difficile à donner.

1.3. Théorème. *Si l'espace normé F est complet, $\mathcal{L}_c(E_1, \dots, E_n; F)$ est un espace de Banach.*

Une application n-linéaire avec $n \geq 2$ non identiquement nulle n'est jamais uniformément continue. Le vérifier par exemple pour : $E_1 = E_2 = F = \mathbb{R}$ et $\Phi(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

Soient maintenant $V_1, \dots, V_n$ des sous-espaces denses respectivement dans les espaces $E_1, \dots, E_n$ et $\Phi : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire continue.

1.4. Théorème. *Si F est complet, l'application Φ se prolonge de manière unique en une application n-linéaire continue $\overline{\Phi} : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ qui vérifie $|||\overline{\Phi}||| = |||\Phi|||$.*

Démonstration. On la fait dans le cas $n = 1$ auquel on peut toujours ramener le cas général. Soit u une application continue d'un sous-espace dense V de E à valeurs dans F. Soit $x \in E$; alors il existe une suite $(x_k)_k$ d'éléments de V telle que $x = \lim x_k$; c'est donc une suite de Cauchy. Comme u est uniformément continue $(u(x_n))$ est une suite de Cauchy dans F qui est complet ; elle y converge donc vers un élément $\overline{u}(x)$ de F ; si $(x'_k)_k$ est une autre suite de V qui converge vers x alors la suite $u(x_1), u(x'_1), u(x_2), u(x'_2), \dots, u(x_k), u(x'_k), \dots$ est de Cauchy dans F, donc convergente. Par suite $\lim u(x_k) = \lim u(x'_k)$. Le vecteur $\overline{u}(x)$ ne dépend donc pas du choix de la suite x_k. Ce qui définit bien $\overline{u}$ sur E. La linéarité de $\overline{u}$ découle de la continuité des opérations "somme" et "multiplication par un scalaire".

D'autre part comme u est continue il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $||u(x)||_F \leq \alpha ||x||_V$; par densité de V dans E on a encore, pour tout $x \in E$, $||\overline{u}(x)||_F \leq \alpha ||x||_E$. Ce qui montre bien l'égalité $|||\overline{u}||| = |||u|||$. □

Une application u d'un e.v.t. E dans un e.v.t. F linéaire bijective, continue et ouverte (*i.e.* u^{-1} est continue) est appelée *isomorphisme topologique* de E sur F. Si en plus E et F sont normés et u une *isométrie i.e.* $\forall x \in E : ||u(x)||_F = ||x||_E$ on dira que u est un *isomorphisme d'espaces normés.*

Dorénavant on ne mettra pas d'indice pour spécifier l'espace sur lequel est définie une norme considérée sauf quand il y a risque de confusion.

Soit maintenant V un sous-espace fermé de l'espace normé E. Alors l'espace quotient E/V est muni de la norme $||X|| = \inf_{x \in X} ||x||$ pour laquelle on démontre facilement la

1.5. Proposition. *i) La projection canonique $\pi : E \longrightarrow E/V$ est continue et a pour norme $|||\pi||| = 1$,*

ii) l'image par π de la boule unité ouverte B_E de E est la boule unité ouverte $B_{E/V}$ de E/V.

On a d'autre part la

1.6. Proposition. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue nulle sur V. Alors il existe une et une seule application linéaire continue $v : E/V \longrightarrow F$ telle que $u = v \circ \pi$ et $|||v||| = |||u|||$.*

Démonstration. Soient $X \in E/V$ et $x, x' \in X$; alors $x - x' = f \in V$. Donc $0 = u(f) = u(x-x') = u(x)-u(x')$. Si on pose $v(X) = u(x)$ avec x un représentant quelconque de la classe X modulo V on définit bien v en tant qu'application linéaire vérifiant $u = v \circ \pi$. Par (VI.5) on a $|||u||| \leq |||v|||$ (puisque $|||\pi||| = 1$). D'autre part comme pour tout point $X \in B_{E/V}$ il existe $x \in B_E$ tel que $X = \pi(x)$ on a $|||v||| \leq |||u|||$. C'est-à-dire $|||u||| = |||v|||$. Ce qui démontre la proposition. □

2. Quelques théorèmes importants

2.1. Théorème de Banach-Schauder. *Soient E et F deux espaces de Banach et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Pour que u soit ouverte il faut, et il suffit, qu'elle soit surjective.*

Démonstration. Si u est ouverte, l'image de la boule unité B de E contient un homothétique $\eta B'$ (avec $\eta > 0$) de la boule unité B' de F. Donc si $y \in F - \{0\}$ est quelconque $\frac{\eta}{2||y||} y \in \eta B'$; alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ *i.e.* u est surjective.

Supposons u surjective. Il suffit de montrer que $u(B)$ contient une boule ouverte centrée en 0 dans F. On a

$$F = \bigcup_{n \geq 1} \overline{u(nB)} = \bigcup_{n \geq 1} n\overline{u(B)}.$$

(découle de la surjectivité de u). Si tous les $n\overline{u(B)}$ étaient d'intérieur vide F serait d'intérieur vide d'après le théorème de Baire, ce qui est absurde. Par suite l'un de ces ensembles (et donc tous puisque ils sont homothétiques) est d'intérieur non vide en particulier $\overline{u(B)}$ est d'intérieur non vide. Il existe alors $y_0 \in \text{int}\,(\overline{u(B)})$ et $\varepsilon > 0$ tels que la boule ouverte $B(y_0, \varepsilon)$ de centre y_0 et de rayon ε soit contenue dans int $(\overline{u(B)})$. Comme $\overline{u(B)}$ est symétrique par rapport à l'origine $B(-y_0, \varepsilon) \subset \text{int}\,\overline{u(B)}$ et comme il est en plus convexe (voir VI. 3.2 pour la définition et les propriétés des ensembles convexes), la boule ouverte de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ centrée à l'origine est contenue dans int $\overline{u(B)}$; 0 est donc un point intérieur de $\overline{u(B)}$. Il existe donc $\rho > 0$ tel que $\rho B' \subset \overline{u(B)}$. Soit $y \in F$ tel que $||y|| < \frac{\rho}{2}$ et définissons une suite (x_n) telle que $x_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$

$$||x_{n+1} - x_n|| < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad ||y - u(x_n)|| < \frac{\rho}{2^{n+1}}.$$

Une telle suite existe. En effet supposons-la construite jusqu'au rang n ; on a

$$y - u(x_n) \in \overline{u\left(\frac{1}{2^{n+1}} B\right)}.$$

On peut donc trouver $z_n \in \frac{1}{2^{n+1}} B$ vérifiant

$$||y - u(x_n) - u(z_n)|| < \frac{\rho}{2^{n+2}}$$

L'élément $x_{n+1} = x_n + z_n$ est alors le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme cherché. La suite (x_n) est de Cauchy ; elle converge donc vers un point $x \in E$ qui vérifie $y = u(x)$ et

$$||x|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n - x_{n-1}|| < 1$$

c'est-à-dire $x \in B$; par suite $y \in u(B)$, donc $\frac{\rho}{2}B' \subset u(B)$ puisque y est choisi quelconque vérifiant $||y|| < \frac{\rho}{2}$. Ce qui montre que u est ouverte. □

Une des applications importantes de ce théorème est donnée par les corollaires qui suivent.

2.2. Corollaire. *i) Soit u une application linéaire continue bijective d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F. Alors u est un isomorphisme topologique.*

ii) Dans un espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Bien sûr l'assertion ii) de ce corollaire n'a pas besoin du théorème de Banach-Schauder pour être établie ; on peut le faire plus simplement à la main en usant d'une base de E.

Notons $\mathcal{G}$ le graphe de u *i.e.* la partie de $E \times F$ (E et F sont toujours des espaces de Banach) dont les éléments (x, y) vérifient $y = u(x)$; c'est un sous-espace normé de l'espace de Banach $E \times F$.

2.3. Corollaire (Théorème du graphe fermé). *L'application u est continue si, et seulement si, $\mathcal{G}$ est fermé.*

Démonstration. Supposons u continue. Alors $\mathcal{G}$ est fermé comme noyau de l'application linéaire continue $(x, y) \in E \times F \longrightarrow y - u(x) \in F$. Réciproquement si $\mathcal{G}$ est fermé dans $E \times F$ il est de Banach. Notons $p : E \times F \longrightarrow E$ la première projection. La restriction de p à $\mathcal{G}$ est continue, bijective puisuq'elle admet pour inverse $x \in E \longrightarrow (x, u(x))$. Celle-ci est donc continue d'après le théorème VI. 2.1 ; par suite u est continue. □

Pour continuer l'étude des propriétés des applications linéaires entre deux espaces normés E et F, nous avons besoin d'introduire certaines topologies sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$ autres que celle définie par la norme

$$|||u||| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)||$$

qu'on appelle la *topologie forte*.

Soit Φ une famille *filtrante* de parties de E *i.e.* $\Phi \subset \mathcal{P}(E)$ et telle que pour tous $A, B \in \Phi$ il existe $C \in \Phi$ contenant $A \cup B$. On appelle Φ-*topologie* sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ et on note $\mathcal{T}_\Phi$ la topologie de la convergence uniforme sur les parties de E qui appartiennent à la famille Φ. C'est-à-dire qu'une suite (u_n) dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ converge vers 0 au sens de $\mathcal{T}_\Phi$ si pour tout élément $A \in \Phi$ la restriction de (u_n) à A converge uniformément vers 0. Pour cette topologie chaque élément $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ admet comme base de voisinages la famille de parties de la forme

$$V(u, A, \varepsilon) = \left\{ v \in \mathcal{L}_c(E, F) : \sup_{x \in A} ||u(x) - v(x)|| < \varepsilon \right\}.$$

où $A \in \Phi$ et $\varepsilon > 0$.

Trois familles Φ vont nous intéresser principalement :

i) $\Phi = \mathcal{B} = \{$parties bornées de $E\}$; $\mathcal{T}_\Phi$ n'est alors rien d'autre que la topologie de la convergence uniforme sur les bornés, c'est-à-dire la *topologie de la norme.* On la notera $\mathcal{T}_\mathcal{B}$.

ii) $\Phi = \mathcal{C} = \{$parties compactes de $E\}$; on la notera $\mathcal{T}_\mathcal{C}$; c'est la *topologie de la convergence compacte.*

iii) $\Phi = \mathcal{F} = \{$parties finies de $E\}$; c'est la *topologie de la convergence simple* ou *topologie faible* qu'on notera $\mathcal{T}_\mathcal{F}$.

Comme $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ on a les implications évidentes qui suivent entre les différents types de convergence : Convergence pour $\mathcal{T}_\mathcal{B} \Longrightarrow$ Convergence pour $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ et Convergence pour $\mathcal{T}_\mathcal{C} \Longrightarrow$ Convergence pour $\mathcal{T}_\mathcal{F}$. Les implications réciproques ne sont pas vraies en général.

On peut voir que *toute partie $\mathcal{U}$ bornée dans l'espace normé $\mathcal{L}_c(E, F)$ est équicontinue.* Dans le cas où E est un espace de Banach ce résultat reste encore vrai (exercice VI. 5.1) si $\mathcal{U}$ vérifie la condition plus faible suivante : $\forall x \in E$, $\sup_{u \in \mathcal{U}} ||u(x)|| < +\infty$. On dira que $\mathcal{U}$ est *simplement bornée.*

2.4. Théorème de Banach-Steinhaus. *Soient E un espace de Banach, F un espace normé et (u_n) une suite dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ qui converge au sens de la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ vers une application linéaire u. Alors $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et (u_n) converge vers u au sens de la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{C}$.*

Démonstration. La suite (u_n) converge simplement vers u *i.e.* pour tout $x \in E$, la suite $(u_n(x))$ converge vers $u(x)$ dans F ; elle est donc simplement bornée. D'après l'exercice VI. 5.2 la famille $\mathcal{U} = (u_n)$ est donc équicontinue, d'où $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Comme $\overline{\mathcal{U}} = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{u\}$ est l'adhérence de $\mathcal{U}$ pour la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ elle est équicontinue. Par suite les restrictions de $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ à $\overline{\mathcal{U}}$ coïncident (exercice VI. 5.1) c'est-à-dire (u_n) converge vers u uniformément sur tout compact de E. □

Nous verrons par la suite beaucoup d'exemples d'applications linéaires continues notamment dans les chapitres IX et X. Les applications linéaires $E \longrightarrow F$ auxquelles nous allons nous intéresser pour le moment seront les *formes linéaires i.e.* F est le corps de base $\mathbb{K}$ (qui est un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même).

3. Le théorème de Hahn-Banach

C'est un théorème respectable de l'analyse fonctionnelle ! Il admet deux formes. La première, dite *géométrique*, permet de séparer strictement un ensemble convexe fermé d'un ensemble compact fermé par un hyperplan fermé. La deuxième forme, dite *analytique*, assure le prolongement avec conservation de la norme d'une forme linéaire continue dès lors qu'on la connaît sur un sous-espace vectoriel. Avant d'énoncer et de démontrer ce théorème, sous ses diverses formes, nous ferons quelques rappels sur la convexité et la caractérisation d'une forme linéaire continue à l'aide de son noyau.

3.1. Proposition. *Soient f une forme linéaire non nulle sur un espace normé E et H son noyau. Alors f est continue si, et seulement si, H est fermé.*

Démonstration. Supposons f continue ; alors H est fermé comme image réciproque de $\{0\}$ qui est fermé dans $\mathbb{K}$. Réciproquement, si H est fermé, l'espace quotient E/H est normé. Comme f est non nulle, il existe au moins un vecteur x_0 tel que $f(x_0) = 1$; alors tout $x \in E$ est équivalent (modulo H) à $f(x)x_0$ puisque $f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0$. Notons $\pi : E \longrightarrow E/H$ la projection canonique ; alors

$$|f(x)| \cdot ||\pi(x)|| = ||\pi(f(x)x_0)|| = ||\pi(x)|| \leq ||x||.$$

Comme $x_0 \notin H$ cette inégalité donne $|f(x)| \leq \frac{||x||}{||\pi(x_0)||}$ *i.e.* f est continue. □

3.2. Convexité dans un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dira qu'une partie A de E est *convexe* si $\forall x, x' \in A$ et $\forall t \in [0,1]$ le vecteur $(1-t)x + tx'$ appartient à A. De manière équivalente A est convexe si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ et tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, le vecteur $\sum_{i=1}^n t_i x_i$ est dans A. Par exemple
- un sous-espace affine,
- une boule dans un espace normé,
- le demi-espace $\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ où f est une forme linéaire réelle et $\alpha \in \mathbb{R}$,
- un cône $C = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha A$ de base une boule $A \subset E$

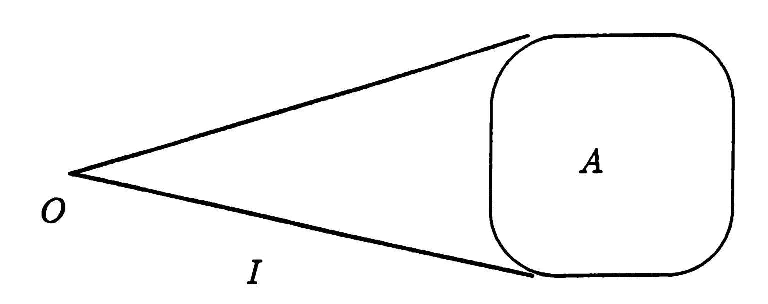


Fig. 2

sont des parties convexes de E. On vérifie sans peine
- que si A est convexe et si $u : E \longrightarrow F$ est une application affine alors $f(A)$ est un convexe de F ; de même si B est un convexe de F, $u^{-1}(B)$ est un convexe de E,
- toute intersection de convexes est un convexe,
- toute somme de parties convexes de E est un convexe de E.

Soit A une partie de E ; alors l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant A est un convexe appelé *enveloppe convexe de* A et est noté habituellement $\widehat{A}$; c'est aussi le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant A. On vérifie sans peine que

$$\widehat{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \mid t_i \in \mathbb{R}_+ \ , \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, \ \ x_i \in A, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Dans un e.v.t. E on appelle usuellement *enveloppe convexe* de A le plus petit convexe fermé contenant A. L'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe sont convexes.

Un hyperplan vectoriel H (sous-espace vectoriel de codimension 1) d'un espace vectoriel réel E peut toujours être considéré comme le noyau de la forme linéaire $\pi : E \longrightarrow E/H = \mathbb{K}$. Soit f une forme affine réelle sur E et posons

$$E_+(f) = \{x \in E : \ \ f(x) > 0\} \quad \text{et} \quad E_-(f) = \{x \in E : \ \ f(x) < 0\},$$

$$\overline{E}_+(f) = \{x \in E : \ \ f(x) \geq 0\} \quad \text{et} \quad \overline{E}_-(f) = \{x \in E : \ \ f(x) \leq 0\}.$$

On dira que $H = \{f = 0\}$ *sépare* (resp. *sépare strictement*) deux parties A et B si $A \subset \overline{E}_-(f)$ et $B \subset \overline{E}_+(f)$ (resp. $A \subset E_-(f)$ et $B \subset E_+(f)$).

Les démonstrations des théorèmes que nous allons énoncer sont aussi valables dans les e.v.t. localement convexes séparés mais nous nous limiterons pour simplifier l'exposé aux espaces normés. Dans toute cette section E sera un espace normé.

3.3. Théorème de Hahn-Banach, forme géométrique. *Soient U une partie ouverte convexe de E et V un sous-espace affine de E tel que $U \cap V = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan affine H fermé tel que $V \subset H$ et $U \cap H = \emptyset$.*

Démonstration. Quitte à effectuer une translation on peut supposer que V est un sous-espace vectoriel. D'autre part nous distinguerons deux cas : E réel et E complexe.

<u>1er cas : E réel</u>.

Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent V et dont l'intersection avec U est vide. Cet ensemble est ordonné par inclusion.

i) Si $\mathcal{V}_0$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{V}$, $\bigcup V_0$, où V_0 parcourt $\mathcal{V}_0$, est un sous-espace vectoriel de E qui contient V et qui ne rencontre pas U, donc un élément de $\mathcal{V}$ qui est la borne supérieure de $\mathcal{V}_0$; par suite $\mathcal{V}$ est *inductif* ; d'après le lemme de Zorn il admet un élément maximal M. Le sous-espace M est nécessairement fermé ; en effet comme U est ouvert et vérifie $U \cap M = \emptyset$ l'adhérence $\overline{M}$ de M ne rencontre pas non plus U ; ce qui contredirait le caractère de maximalité de M s'il n'était pas fermé.

ii) L'espace quotient E/M est normé ; notons $\pi : E \longrightarrow E/M$ la projection canonique et C le cône ouvert de base $\pi(U)$ dans E/M. Comme M est un sous-espace vectoriel qui ne rencontre pas U, $0 \notin C$.

iii) L'espace E/M est de dimension 1. Supposons le contraire. Alors $(E/M)-\{0\}$ est une partie connexe de E/M et comme elle est différente de C, la frontière $Fr(C)$ de C (l'adhérence de C moins son intérieur) contient un point X. Ce point X ne peut pas appartenir à $-C = \{-Z|Z \in C\}$; en effet si $-C$ contenait X, il serait un voisinage de X puisqu'il est ouvert ; par suite il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la boule

$B(X,\varepsilon) \subset -C$; d'autre part comme X est adhérent à C cette boule contiendrait un point Y de C ; donc $Y \in C$ et $Y \in -C$ c'est-à-dire Y et $-Y$ sont dans C ; comme C est convexe (c'est un cône de base une partie convexe), $0 \in C$, ce qui n'est pas le cas comme on l'a démontré en ii). Soit V_X le sous-espace vectoriel engendré par X ; il est strictement contenu dans E/M et ne rencontre pas le cône C, donc $H = \pi^{-1}(V_X)$ contient strictement M et ne rencontre pas l'ouvert U. Ce qui contredit encore une fois la maximalité de M.

iv) Il résulte de ce qui précède que l'espace quotient E/M est normé de dimension 1 tel que C ne contient pas son origine *i.e.* M est un hyperplan fermé ne rencontrant pas U. On prend $H = M$.

2ème cas : E complexe.

L'espace E est en particulier un espace vectoriel réel. D'après ce qui précède il existe un hyperplan réel fermé H_0 de l'espace réel E qui ne rencontre pas U. Comme V est un sous-espace vectoriel complexe de E, il est stable par l'automorphisme $x \in E \longmapsto ix \in E$ *i.e.* $V = iV$. Par conséquent $H = H_0 \cap iH_0$ est un sous-espace vectoriel complexe fermé de codimension complexe 1 (car de codimension réelle 2) qui contient V et qui ne rencontre pas U. Ce qui termine la démonstration de la version géométrique du théorème de Hahn-Banach. □

Une autre version de la séparation entre ensembles convexes est donnée par le théorème qui suit.

3.4. Théorème. *Supposons E réel. Soient C et K deux parties convexes disjointes de E avec C fermée et K compacte. Alors C et K sont strictement séparées par un hyperplan affine fermé H.*

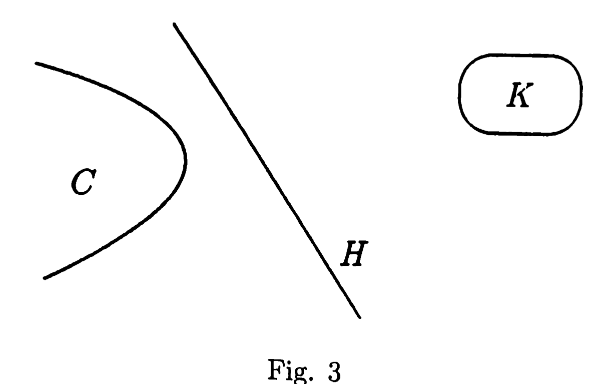


Fig. 3

Démonstration. La distance

$$\delta = \inf_{c \in C, k \in K} ||c - k||$$

entre les deux fermés disjoints C et K est strictement positive. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \delta$; alors l'ensemble $U = C - K + B(0,\varepsilon)$ est égal à

$$\bigcup_{c \in C, k \in K} \{c - k + B(0,\varepsilon)\}.$$

C'est donc un ensemble convexe ouvert de E (convexe parce que somme de convexes et ouvert parce que réunion d'ouverts). Il ne contient pas l'origine car pour $c \in C$, $k \in K$ et $b \in B(0, \varepsilon)$ on a

$$\begin{aligned} \|c - k + b\| &\geq \big| \|c - k\| - \|b\| \big| \\ &\geq |\delta - \varepsilon| > 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème VI. 3.3 il existe un hyperplan vectoriel H, noyau d'une forme linéaire continue f, qui ne rencontre pas U ($\{0\}$ joue le rôle du sous-espace V). Supposons que $f_{|U} > 0$ *i.e.* pour tout $c \in C$, tout $k \in K$ et tout $b \in B(0, \varepsilon)$, $f(c) - f(k) + f(b) > 0$ ou encore $f(k) - f(b) < f(c)$. Cette inégalité étant vraie pour c, k et b variant de manière indépendante on aura

$$\text{(VI.6)} \qquad \sup_{k \in K} f(k) + \sup_{\|b\| \leq \varepsilon} f(b) \leq \inf_{c \in C} f(c).$$

Mais $\sup_{\|b\| \leq \varepsilon} f(b) = \varepsilon \|f\|$ (parce que f est une forme linéaire continue sur E). Le nombre : $\sup_{k \in K} f(k)$ existe bien car f est continue et K compact ; l'inégalité (VI.6) implique donc que $\inf_{c \in C} f(c)$ existe bien. On aura donc

$$\text{(VI.6. bis)} \qquad \inf_{c \in C} f(c) - \sup_{k \in K} f(k) \geq \varepsilon \|f\|.$$

Ceci montre aisément qu'il existe un réel α tel que

$$K \subset \{x \in E \ : f(x) < \alpha\} \quad \text{et} \quad C \subset \{x \in E \ : f(x) > \alpha\}$$

i.e. K et C sont strictement séparés par l'hyperplan réel affine fermé d'équation $f(x) = \alpha$. □

De ce théorème on tire le

3.5. Corollaire. *Toute partie convexe fermée C de E est l'intersection des demi-espaces fermés qui la contiennent.*

Démonstration. Soit a un point de E n'appartenant pas à C. On applique le théorème VI. 3.4 au fermé convexe C et au compact convexe $\{a\}$: il existe une forme affine continue f_a telle que

$$C \subset \overline{E}_+(f_a) \quad \text{et} \quad \{a\} \subset \overline{E}_-(f_a).$$

Il est alors clair que l'ensemble

$$\bigcap_{a \in E - C} \overline{E}_+(f_a)$$

est fermé et est égal à C. □

3.6. Théorème de Hahn-Banach, forme analytique. *Soient V un sous-espace normé de E non réduit à $\{0\}$ et f une forme linéaire continue non nulle sur V. Alors il existe une forme linéaire continue $\widetilde{f}$ sur E telle que*

i) $\widetilde{f}_{|V} = f$,
ii) $|||\widetilde{f}||| = |||f|||$.

Démonstration. D'abord on peut supposer que V est fermé sinon on prolonge à l'adhérence $\overline{V}$ via le théorème VI. 1.4. D'autre part la démonstration distinguera le cas réel du cas complexe. On supposera bien sûr $V \neq E$.

<u>1er cas : E réel</u>.

i) Soit $x_0 \in E - V$ et posons $M_1 = V \oplus \mathbb{R}x_0$. Soit f_1 la forme linéaire sur M_1 définie par

$$f_1(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda\alpha$$

où α est un nombre réel qui est l'image de x_0 par f_1 et qu'on choisira de telle sorte que la norme de f_1 soit égale à celle de f. Il faut donc, et il suffit, d'avoir

$$|f_1(x + \lambda x_0)| \leq |||f|||.||x + \lambda x_0||$$

pour tout $x \in V$ et tout réel λ ; ce qui est encore équivalent à

(VI.7) $$|f(x) - \alpha| \leq |||f|||.||x - x_0||$$

pour tout $x \in V$, c'est-à-dire

(VI.7. bis) $$f(x) - |||f|||.||x - x_0|| \leq \alpha \leq f(x) + |||f|||.||x - x_0||$$

pour tout $x \in M$. Posons

$$A_x = f(x) - |||f|||.||x - x_0|| \quad \text{et} \quad B_x = f(x) + |||f|||.||x - x_0||.$$

Alors α vérifiant (VI.7. bis) existe si, et seulement si, les intervalles $[A_x, B_y]$ ont un point commun pour tous $x, y \in V$. Mais

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f(x - y) \\ &\leq |||f|||.||x - y|| \\ &\leq |||f|||.(||x - x_0|| + ||y - x_0||)\,. \end{aligned}$$

Ce qui donne l'inégalité $A_x \leq B_y$ pour tous $x, y \in V$. Le nombre α peut donc être choisi de telle sorte que f_1 soit continue et de norme égale à celle de f.

ii) Soit maintenant $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les couples (V', f') où V' est un sous-espace vectoriel de E contenant V et f' est une extension continue de f à V' telle que $|||f'||| = |||f|||$. On munit $\mathcal{V}$ de l'ordre partiel suivant :

$$(V', f') \leq (V'', f'')$$

si, et seulement si, $V' \subset V''$ et f'' est un prolongement continu de f'. Si $\mathcal{V}_0$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{V}$ on pose

$$V_\infty = \bigcup_{V_0 \in \mathcal{V}_0} V_0.$$

Alors V_∞ est un sous-espace de E contenant V. Si $x \in V_\infty$ il existe $(V_0, f_0) \in \mathcal{V}_0$ tel que $x \in V_0$; on pose alors $f_\infty(x) = f_0(x)$. L'élément (V_∞, f_∞) est donc bien dans $\mathcal{V}$ et est une borne supérieure de $\mathcal{V}_0$; autrement dit, l'ensemble ordonné $\mathcal{V}$ est inductif. D'après le lemme de Zorn, il admet un élément maximal (V_M, f_M).

iii) V_M est forcément fermé sinon on prolonge à l'adhérence$\overline{V}_M$; d'autre part $E = V_M$; si ce n'était pas le cas il existerait d'après i) un sous-espace contenant strictement V_M sur lequel f_M se prolonge en une forme linéaire continue en conservant sa norme ; ce qui contredit le caractère de maximalité de (V_M, f_M). Le prolongement cherché est obtenu donc en posant $\widetilde{f} = f_M$.

<u>2ème cas : E complexe.</u>

On regarde E et V comme des espaces vectoriels réels et on note u la partie réelle de f qui est continue et a même norme que f (*cf.* exercice VI. 5.5). D'après le 1er cas, u se prolonge en une forme linéaire continue réelle $\widetilde{u}$ sur l'espace vectoriel réel E ayant même norme que u. L'application $\widetilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{u}(x) - i\widetilde{u}(ix)$$

est une forme $\mathbb{C}$-linéaire continue prolongeant f et de même norme. □

Le corollaire qui suit donne une conséquence intéressante de la forme analytique du théorème de Hahn-Banach.

3.7. Corollaire. *Soit x_0 un vecteur non nul de E. Alors il existe sur E une forme linéaire continue f telle que $f(x_0) = ||x_0||$ et $|||f||| = 1$.*

Démonstration. Soit V le sous-espace vectoriel de E engendré par x_0 *i.e.* l'ensemble des éléments de la forme λx_0 où $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $f_0(\lambda x_0) = \lambda ||x_0||$. Alors f_0 est une forme linéaire continue sur V de norme $|||f_0||| = 1$; d'après le théorème VI. 3.6. elle se prolonge en une forme linéaire continue f sur E de norme 1. □

Ceci dit en particulier que si l'espace E n'est pas réduit à $\{0\}$, son *dual topologique* E' n'est pas non plus réduit à $\{0\}$.

3.8. Corollaire. *Soit V un sous-espace vectoriel de E. Alors V est dense si, et seulement si, toute forme linéaire continue sur E nulle sur V est nulle.*

Démonstration. Si V est dense alors, de façon évidente, une forme linéaire continue sur E nulle sur V est nulle. Inversement supposons que l'adhérence $\overline{V}$ de V soit strictement contenue dans E. Il existe alors $x_0 \in E - \overline{V}$ (non nul bien sûr). D'après le corollaire VI. 3.7, il existe une forme linéaire continue sur $\overline{V} \oplus \mathbb{K}x_0$ nulle sur V et valant 1 en x_0 : il suffit de poser $f(v + \lambda x_0) = \lambda ||x_0||$ où $v \in \overline{V}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par le théorème de Hahn-Banach (version analytique), f se prolonge en une forme linéaire continue $\widetilde{f}$ sur E, non nulle mais nulle sur V. Ce qui démontre le corollaire. □

4. Exemples

Nous allons donner des exemples précis de formes linéaires continues sur certains espaces de fonctions.

4.1. Formes linéaires positives

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle qu'une partie E de Ω est dite *négligeable* s'il existe $A \in \mathcal{A}$ contenant E tel que $\mu(A) = 0$. On dira que la tribu $\mathcal{A}$ est *complète* pour μ si tout $E \subset \Omega$ vérifiant $A \subset E \subset B$ avec $A, B \in \mathcal{A}$ et $\mu(A - B) = 0$, appartient à $\mathcal{A}$; en particulier si E est négligeable, $E \in \mathcal{A}$. *Pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A})$ il existe une tribu $\mathcal{A}^*$ contenant $\mathcal{A}$ et une mesure μ^* sur $\mathcal{A}^*$ qui prolonge μ et telles μ^* soit complète pour $\mathcal{A}^*$.*

Pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et tout $p \geq 1$, on note comme toujours $L^p(\Omega, \mu)$ l'espace des classes (modulo l'égalité en dehors des ensembles de mesure nulle) de fonctions complexes mesurables de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable muni de la norme

$$||g||_p = \left(\int_\Omega |g|^p d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$ on notera $L^\infty(\Omega, \mu)$ l'espace des classes de fonctions *μ-essentiellement bornées* sur Ω *i.e.* le quotient de

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable et bornée } \mu\text{-pp}\}$$

par l'espace $\mathcal{N}$ des fonctions mesurables μ-pp partout nulles. On le munit de la norme :

$$||f||_\infty = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \ : \ |f| \leq \alpha \ \mu\text{-pp}\}.$$

Dans V. 5.3 on a montré que $|| \ ||_\infty$ est effectivement une norme sur $L^\infty(\Omega, \mu)$ et qu'elle en fait un espace de Banach.

L'application $I : L^1(\Omega, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à g associe

$$I(g) = \int_\Omega g(\omega) d\mu(\omega)$$

est une forme linéaire continue de norme 1 sur $L^1(\Omega, \mu)$. Elle vérifie en plus la propriété suivante : si g est réelle positive, $I(g)$ est un réel positif. On dira que I est une *forme linéaire positive.* Nous allons voir que pour certains espaces normés toutes les formes linéaires positives sont données par une intégrale associée à une certaine mesure.

Soient X un espace topologique séparé localement compact et $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne (celle engendrée par les ouverts). Une mesure μ sur $\mathcal{B}$ est dite *régulière* si elle vérifie, pour tout $E \in \mathcal{B}$,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \ E \subset U, \ U \text{ ouvert}\}$$

et pour tout $E \in \mathcal{B}$ de mesure finie

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \quad K \subset E, \quad K \text{ compact}\}.$$

On rappelle que le support d'une fonction est l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels elle n'est pas nulle. Notons $\mathcal{K}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à support compact muni de la norme

$$||g||_\infty = \sup_{x \in X} |g(x)|.$$

Une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{K}(X)$ est appelée *mesure de Radon* sur X. Toute mesure μ sur $\mathcal{B}$ donne via l'intégrale une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{K}(X) \subset L^1(X, \mu)$. La réciproque est connue sous le nom de *théorème de représentation de Riesz.* Sa démonstration est hautement non triviale ; nous nous contenterons de son énoncé.

4.2. Théorème de représentation de Riesz. *Soit F une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{K}(X)$. Alors il existe une tribu $\mathcal{B}^*$ contenant $\mathcal{B}$, complète pour une mesure régulière μ finie sur les compacts, telle que*

$$F(g) = \int_X g d\mu, \qquad \forall g \in \mathcal{K}(X).$$

Le lecteur désireux de connaître quand-même la démonstration peut consulter [Kr] ou [Ru]. Voir exercice VII. 4.9. pour une variante de théorème.

4.3. Distributions sur $\mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, considérons maintenant l'espace vectoriel $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^n ayant un support compact dans $\mathbb{R}$ qu'on munit du mode de convergence suivant : une suite (φ_j) converge vers 0, s'il existe un compact K tel que

i) $\mathrm{supp}(\varphi_\ell) \subset K$,

ii) pour tout $r \in \{0, \dots n\}$ si n est fini et tout $r \in \mathbb{N}$ si $n = +\infty$, la suite $(\varphi_j^{(r)})_{j\in\mathbb{N}}$ des dérivées d'ordre r des φ_j converge uniformément vers 0 sur K.

Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ continue (dans le sens où si $\varphi_j \to 0$ alors $T(\varphi_j) \to 0$) est appelée *distribution d'ordre n* sur $\mathbb{R}$. La valeur de T sur une fonction $\varphi \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ sera notée $\langle T, \varphi\rangle$. L'ensemble des distributions d'ordre n est bien sûr le dual topologique de $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ qu'on note $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})'$. Par exemple, si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute $\varphi \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$

$$\delta^{(n)}(\varphi) = \varphi^{(n)}(a),$$

on obtient une forme linéaire sur $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ dite *distribution de Dirac d'ordre n* au point a sur $\mathbb{R}$.

Pour $n = \infty$ l'espace $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$ sera noté $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et une distribution d'ordre $n = \infty$ sera appelée simplement *distribution.* Comme on a

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{D}^{n+1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}^n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{D}^0(\mathbb{R}) = \mathcal{K}(\mathbb{R})$$

on voit que toute distribution d'ordre n est une distribution ; toute distribution d'ordre n est une distribution d'ordre $n+1$ et toute mesure de Radon est une distribution d'ordre n pour tout n. On a donc une suite d'inclusions strictes (*cf.* exercice VI. 5.5)

$$\mathcal{K}(\mathbb{R})' \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathcal{D}^n(\mathbb{R})' \hookrightarrow \mathcal{D}^{n+1}(\mathbb{R})' \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})'.$$

On dira qu'une distribution T (ou distribution d'ordre n) est *positive* si, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ réelle positive, $\langle T, \varphi \rangle$ est réel positif. On a le résultat important suivant dont on peut trouver une démonstration dans [Scl] : *toute distribution positive est une mesure de Radon.* On peut aussi consulter [La] pour une étude plus étendue sur les distributions.

5. Exercices

5.1. Soient E et F deux espaces normés, $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F et $\mathcal{U}$ une partie équicontinue de $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Montrer que les restrictions des topologies $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ à $\mathcal{U}$ coïncident.

5.2. Soit $\mathcal{U}$ une partie simplement bornée de $\mathcal{L}_c(E,F)$ où E est un espace de Banach et F un espace normé quelconque. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose

$$A_n = \left\{ x \in E : \sup_{u \in \mathcal{U}} ||u(x)|| \leq n \right\}.$$

i) Montrer que $E = \bigcup_n A_n$ et en déduire que int (A_1) n'est pas vide. (Appliquer le théorème de Baire à la suite (A_n) dans l'espace métrique complet E.)

ii) Montrer que l'origine 0 est point intérieur à A_1. En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que la boule $B(0,r) \subset A_1$ et que $\mathcal{U}$ est borné dans l'espace normé $\mathcal{L}_c(E,F)$.

5.3. Soient E un espace de Banach, F et G deux espaces normés et $\phi : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire telle que les applications partielles

$$\phi(.,y) : x \in E \longrightarrow \phi(x,y) \in G$$

$$\phi(x,.) : y \in F \longrightarrow \phi(x,y) \in G$$

soient continues. Soient (x_n) et (y_n) deux suites tendant vers 0 respectivement dans E et F. Montrer que $(\phi(.,y_n))_n$ converge uniformément sur $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ et en déduire que ϕ est continue. (Appliquer le théorème de Banach-Steinhaus.)

5.4. On note $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles continues à support compact sur $\mathbb{R}$ et L^p (avec $p \geq 1$) l'espace des classes (au sens de l'égalité presque partout pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$) de fonctions réelles mesurables de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable et L^∞ l'espace de Banach des classes de fonctions λ-essentiellement bornées. Bien sûr, $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est un sous-espace de L^p. On admet que $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est dense dans L^p (pour la norme $|| \ ||_p$). Soient f et g deux fonctions mesurables ; on pose

$$(f * g)(x) = \int_\mathbb{R} f(x-y)g(y)d\lambda(y).$$

La fonction $f * g$ (quand elle est définie) est appelée *produit de convolution* de f par g.

i) Soit $f \in L^p$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ la fonction $\tau_a(f)$ définie par $\tau_a(f)(y) = f(a-y)$ est dans L^p et que l'application τ de $\mathbb{R}$ dans L^p qui à a associe $\tau_a(f)$ est uniformément continue.

ii) Montrer que, si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $f * g$ est partout définie, bornée, uniformément continue et qu'on a

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

i.e. $(f, g) \in L^p \times L^q \longrightarrow f * g \in L^\infty$ est une application bilinéaire continue.

iii) Montrer que si f et g sont dans $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ alors

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g).$$

et donc que le produit de convolution est bien défini sur $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ *i.e.* si f et g sont à support compact alors $f * g$ est aussi à support compact.

5.5. Soient E un espace normé complexe et f une forme $\mathbb{C}$-linéaire continue sur E. On note u la partie réelle de f qui est une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue sur E et J l'automorphisme complexe de E qui à x associe ix.

Montrer que $f = u - J \circ u \circ J$ et que $|||f||| = |||u|||$. (Utiliser le fait que pour tout nombre complexe z il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $|z| = e^{i\theta} z$.)

5.6. On rappelle qu'une distribution d'ordre $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ (*cf.* VI. 4.3).

i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, la distribution $\delta_a^{(n+1)}$ ne peut pas être d'ordre n.

ii) Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels tendant vers l'infini. Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{a_n}^{(n)}$$

est une distribution qui ne s'étend à aucun espace $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5.7. Soient E un espace normé et V_1 et V_2 deux sous-espaces de E. On dira que V_2 est un *supplémentaire topologique* de V_1 (ou que V_1 est un supplémentaire topolgique de V_2) si l'application

$$(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \longrightarrow x_1 + x_2 \in E$$

est un isomorphisme topologique.

i) Montrer que si V_2 est un supplémentaire topologique de V_1 alors V_1 et V_2 sont fermés.

Supposons que V_1 soit un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

ii) Montrer que l'application identité $id : V_1 \longrightarrow V_1$ se prolonge en une application continue $f : E \longrightarrow V_1$.

iii) En déduire que V_1 admet un supplémentaire topologique V_2.

5.8. On note E l'espace des fonctions complexes continues sur l'intervalle $[0, 1]$ qu'on munit des deux normes

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } ||f||_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On rappelle que $(E, ||\ ||_\infty)$ est complet et que $(E, ||\ ||_2)$ ne l'est pas. On a en plus $||f||_2 \leq ||f||_\infty$ pour toute fonction $f \in E$.

Soit M un sous-espace vectoriel de E complet pour la norme $||\ ||_2$.

i) Montrer que M est complet pour la norme $||\ ||_\infty$.

ii) Montrer que les normes $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_2$ sont équivalentes sur le sous-espace M.

iii) Soit x un point de $[0,1]$. Montrer que la forme linéaire $f \in M \longrightarrow f(x) \in \mathbb{C}$ est continue.

iv) Soit B_∞ la boule unité fermée de $(M, ||\ ||_\infty)$. Montrer que de toute suite (f_n) dans B_∞ on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge simplement vers $f \in M$.

(Utiliser la question 3 et l'assertion suivante qu'on admettra : *dans l'espace* $(M, ||\ ||_2)$ *toute suite bornée* (f_n) *admet une sous-suite* (f_{n_k}) *faiblement convergente i.e. il existe un élément* $f \in M$ *tel que pour toute forme linéaire continue* φ *sur* M, *la suite scalaire* $(\varphi(f_{n_k}))$ *converge vers* $\varphi(f)$.)

v) En appliquant le *théorème de convergence dominée* montrer que $(f_{n_k})_k$ converge vers f pour la norme $||\ ||_2$.

vi) Montrer que B_∞ est compacte pour la topologie définie par $||\ ||_2$.

vii) En déduire que M est de dimension finie.

CHAPITRE VII
Dualité dans les espaces normés

L'objet de ce chapitre est d'étudier certaines relations entre un espace normé E, son dual topologique E' et son bidual E'' au moyen de deux topologies (la première dite *faible* sur E' et la deuxième dite *affaiblie* sur E). Nous verrons en particulier que même en dimension infinie les ensembles bornés de E' jouissent de très bonnes propriétés dans le cas où E est un espace de Banach. Les notions de transposition et de réflexivité sont introduites de façon non exhaustive.

1. Notations et définitions

Pour deux espaces normés E et F réels ou complexes on notera toujours $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme

$$|||u||| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)||.$$

Pour $F = \mathbb{K}$, $L_c(E, \mathbb{K})$ n'est rien d'autre que le dual topologique de E qu'on note simplement E' ; c'est un sous-espace vectoriel du dual algébrique E^* (l'ensemble de toutes les formes linéaires continues ou non).

La valeur d'une forme linéaire continue x' au point $x \in E$ sera notée $\langle x, x' \rangle$. On obtient donc une forme bilinéaire

$$(x, x') \in E \times E' \longrightarrow \langle x, x' \rangle \in \mathbb{K}$$

continue de norme ≤ 1 puisque $|\langle x, x' \rangle| \leq |||x'|||.||x||$. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, on montre que la norme de cette forme bilinéaire est en fait 1 et qu'on a

$$\text{(VII.1)} \qquad (\langle x, x' \rangle = 0, \quad \forall x' \in E') \Longrightarrow x = 0.$$

On dira alors que E et E' sont en *dualité séparante.* Rappellons que dans $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ il y a différentes topologies :

- la topologie de la norme ou la topologie forte notée $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$,
- la topologie faible $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ qu'on notera dorénavant $\sigma(E', E)$ (c'est l'usage). C'est la topologie la moins fine sur E' qui rend continues toutes les formes linéaires

$$x' \in E' \xrightarrow{\varphi_x} \langle x, x' \rangle \in \mathbb{K}$$

où x varie dans E.

Rappellons qu'un voisinage de $0 \in E'$ pour cette topologie contient une intersection finie de parties de la forme

$$V(0, x, \varepsilon) = \{x' \in E' \ : \ |\langle x, x' \rangle| < \varepsilon\}$$

avec x dans E et ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

La proposition suivante est immédiate.

1.1. Proposition. *Le dual topologique E' de E s'identifie canoniquement au dual topologique $\widehat{E}'$ de son complété $\widehat{E}$.*

Bien que $\widehat{E}' = E'$ la topologie $\sigma(\widehat{E}', \widehat{E})$ sur $\widehat{E}'$ peut être strictement plus fine que la topologie $\sigma(E', E)$ sur E'. Ceci découle de la proposition qui suit qui donne une caractérisation des formes linéaires continues sur E' lorsqu'on le munit de la topologie $\sigma(E', E)$.

1.2. Proposition. *Soit f une forme linéaire sur E' continue pour la topologie $\sigma(E', E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que, pour tout $x' \in E'$, $f(x') = \langle x, x' \rangle$.*

Démonstration. Comme f est continue sur E' pour la topologie $\sigma(E', E)$ l'ensemble

$$\{x' \in E' \ : \ |f(x')| \leq 1\}$$

contient un voisinage de 0. Il existe donc un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset E$ et une constante réelle $C > 0$ tels que

$$|f(x')| \leq C \sup_{i=1,\ldots,k} |\langle x_i, x' \rangle|. \tag{VII.2}$$

Par conséquent si on a $\langle x_i, x' \rangle = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, k$ alors $f(x') = 0$. Donc $f = 0$ sur l'intersection des noyaux des formes linéaires $x' \longmapsto \langle x_i, x' \rangle$; par suite f est une combinaison linéaire finie avec des coefficients λ_i des formes linéaires $x' \longrightarrow \langle x_i, x' \rangle$ (*cf.* exercice VII. 4.1). On peut donc prendre $x = \sum_i \lambda_i x_i$. □

On voit donc que les seules formes linéaires sur E' continues pour $\sigma(E', E)$ sont du type $x' \longmapsto \langle x, x' \rangle$ pour un certain $x \in E$. Par conséquent si E n'est pas complet il existe $\widehat{x} \in \widehat{E} - E$ tel que la forme linéaire $x' \in E' = \widehat{E}' \longrightarrow \langle \widehat{x}, x' \rangle \in \mathbb{K}$ ne soit pas continue pour $\sigma(E', E)$.

Les espaces E et E' jouent des "rôles presque symétriques" ; il est donc possible de définir sur E des topologies similaires à celles définies sur E'. D'abord E est un espace normé ; la topologie associée sera appelée la *topologie initiale.* Ensuite on peut considérer la topologie la moins fine sur E qui rend continues toutes les formes linéaires sur E déjà continues pour la topologie initiale ; cette topologie sera appelée la *topologie affaiblie* et notée $\sigma(E, E')$ (les rôles de E et E' sont intervertis en quelque sorte).

Il résulte de la définition même de $\sigma(E, E')$ que

- *les formes linéaires continues sur E pour la topologie initiale sont les mêmes que les formes linéaires sur E continues pour la topologie affaiblie,*

- *les fermés convexes pour la topologie initiale et la topologie affaiblie sont les mêmes.* Ceci découle de ce qui précède et du fait que tout convexe fermé est intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

Rappellons qu'une partie $A \subset E$ (resp. une partie $A' \subset E'$) est dite *bornée* s'il existe $\rho > 0$ (resp. $\rho' > 0$) tel que $A \subset B(0, \rho)$ (resp. $A' \subset B'(0, \rho')$).

On peut donner la notion d'ensemble borné pour les deux autres topologies sur E et E' qui ne sont pas associées aux normes c'est-à-dire $\sigma(E, E')$ et $\sigma(E', E)$.

- Une partie A de E est dite *bornée pour* $\sigma(E, E')$ si pour tout $x' \in E'$ on a

$$\sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle| < +\infty$$

- De la même manière, une partie A' de E' est *faiblement bornée* si pour tout $x \in E$ on a

$$\sup_{x' \in A'} |\langle x, x' \rangle| < +\infty.$$

1.3. Proposition. *Soit A' une partie de E'. Alors*
i) A' est bornée si, et seulement si, A' est équicontinue ;
ii) si A' est équicontinue, elle est relativement compacte pour la topologie faible.

Démonstration. i) A' bornée signifie que $\sup_{x' \in A'} |||x'||| \leq C$ où C est une constante réelle positive. Ce qui implique de manière immédiate l'équicontinuité de A'. La réciproque est évidente.

ii) D'après i) A' est bornée, donc faiblement bornée *i.e.* pour tout $x \in E$ l'ensemble des scalaires $\{\langle x, x' \rangle : x' \in A'\}$ est borné, donc relativement compact. D'après le théorème d'Ascoli A' est relativement compacte pour la topologie de la convergence compacte sur E'qui est plus fine que la topologie faible, donc A' est relativement compacte pour la topologie $\sigma(E', E)$. □

Ceci nous permet de démontrer le

1.4. Théorème. *La boule unité fermée B' de E' est faiblement compacte i.e. compacte pour la topologie faible.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$ on note $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi_x(x') = |\langle x, x' \rangle|$. Alors φ_x est une fonction semi-continue inférieurement sur E' pour la topologie faible. En effet d'après la définition de $\sigma(E', E)$ pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $V(0, x, \varepsilon) = \{x' \in E' : |\langle x, x' \rangle| \leq \varepsilon\}$ est fermé dans E'. Donc l'enveloppe supérieure de la famille $(\varphi_x)_{||x|| \leq 1}$, qui n'est rien d'autre que l'application $x' \longmapsto |||x'|||$, est aussi semi-continue inférieurement (*cf.* exercice VII. 4.2). La boule unité fermée B' est donc faiblement fermée ; comme elle est bornée, elle est faiblement compacte. □

Si l'espace E est séparable, B' est faiblement compacte si, et seulement si, de toute suite (x'_n) on peut extraire une sous-suite (x'_{n_k}) faiblement convergente : il existe un élément $x' \in B'$ tel que, pour tout $x \in E$, la suite numérique $(\langle x, x'_{n_k} \rangle)$ converge vers $\langle x, x' \rangle$.

L'exercice VII. 4.3 montre que dans le dual E' d'un espace E normé il peut exister des ensembles faiblement bornés mais non bornés. Cela ne saurait se produire si l'espaces E est de Banach.

1.5. Proposition. *Soient E un espace de Banach et A' une partie de E'. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) A' est bornée,

ii) A' est faiblement bornée,
iii) A' est équicontinue.

Démonstration. Les assertions i) et iii) sont équivalentes même si E n'est pas complet ; c'est la proposition VII.1.3. Il est d'autre part évident que i) implique ii). L'implication ii)$\Longrightarrow$ *i*) découle de l'exercice VI. 5.2. □

2. Réflexivité

Le fait que le dual E' d'un espace normé soit un espace de Banach va nous permettre de donner certaines propriétés sur le dual E'' de E' qu'on appelle le *bidual* de E. Soit $x \in E$ et considérons l'*application d'évaluation* en x

$$\Phi_x : E' \longrightarrow \mathbb{K}$$

définie par $\Phi_x(x') = \langle x, x' \rangle$.

2.1. Proposition. *Pour tout $x \in E$ l'application Φ_x est une forme linéaire continue de norme $||x||$ sur l'espace E', donc un élément du bidual E'' de E. De plus l'application $x \longmapsto \Phi_x$ est une injection isométrique de E dans E''.*

Démonstration. Le fait que Φ_x soit une forme linéaire continue de norme $\leq ||x||$ sur E' est évident. Pour montrer que $|||\Phi_x||| = ||x||$, il suffit d'appliquer le corollaire VI. 3.7. Ceci montre aussi que l'application Φ est une injection isométrique de l'espace normé E dans l'espace normé E''. Autrement dit E est un sous-espace normé de E''. □

On peut remarquer que la topologie faible $\sigma(E'', E')$ sur E'' induit la topologie affaiblie sur E.

2.2. Définition *On dira qu'un espace normé E est* **réflexif** *si l'application naturelle $\Phi : E \longrightarrow E''$ est un isomorphisme topologique.*

Comme le dual d'un espace normé est toujours de Banach, E'' est de Banach ; donc une condition nécessaire (et en général non suffisante) pour que E soit réflexif est qu'il soit complet.

2.3. Théorème. *Pour qu'un espace de Banach E soit réflexif il faut, et il suffit, que sa boule unité fermée soit compacte pour la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$.*

Ce théorème, dû à Banach et qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Banach soit réflexif, est en fait utilisé pour prouver que la boule unité fermée est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$ qui est toujours un fait loin d'être trivial.

2.4. Exemple d'espace réflexif

Pour tout réel $p > 1$ on note $E_p = \ell^p$ l'espace des suites réelles de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable muni de la norme

$$||x||_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Soient $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $\Phi : x \in E_q \longrightarrow \Phi_x \in E'_p$ définie par

$$\Phi_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n.$$

D'après l'inégalité de Hölder, cette somme a bien un sens et on a

$$|\Phi_x(y)| \leq ||x||_q ||y||_p.$$

Ceci montre que Φ_x est bien une forme linéaire continue sur E_p de norme

$$|||\Phi_x||| \leq ||x||_q. \tag{VII.3}$$

Il est clair d'autre part que $\Phi_{x_1+x_2} = \Phi_{x_1} + \Phi_{x_2}$ et $\Phi_{\lambda x} = \lambda \Phi_x$ *i.e.* Φ est linéaire.

i) Montrons que Φ est une isométrie de E_q dans E'_p. Soient $x = (x_n)$ une suite de réels, $n \in \mathbb{N}$ et $Y_n = (y_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ l'élément de E_p défini comme suit

$$y_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \text{ ou } 0 \leq k \leq n \text{ et } x_k = 0 \\ x_k|x_k|^{q-2} & \text{si } 0 \leq k \leq n \text{ et } x_k \neq 0. \end{cases} \tag{VII.4}$$

Supposons que $x \in E_q$. Alors on a

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q = |\Phi_x(Y_n)|$$
$$\leq |||\Phi_x||| \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a $q = (q-1)p$. Ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q \leq |||\Phi_x||| \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq |||\Phi_x|||. \tag{VII.5}$$

Comme le second membre de (VII.5) ne dépend pas de n on a

$$||x||_q \leq |||\Phi_x|||. \tag{VII.6}$$

Les inégalités (VII.3) et (VII.6) montrent que Φ est une isométrie ; elle est donc injective.

ii) Montrons que Φ est surjective. Soient $f \in E'_p$ et $(e_n)_n$ la suite d'éléments de E_p tels que $e_n = (\delta_n^k)_k$ où δ_n^k est le symbole de Kronecker. Posons $x_n = f(e_n)$ et notons Y_n l'élément de E_p défini par (VII.4). On a clairement

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} y_{nk} e_k.$$

D'où

$$f(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} y_{nk} f(e_k) = \sum_{k=0}^{n} y_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{n} |x_k|^q.$$

Ce qui donne

$$\left| \sum_{k=0}^{n} |x_k|^q \right| \leq |||f|||.||Y_n||_p.$$

Un raisonnement analogue à celui fait en i) montre que

$$||x||_q \leq |||f|||.$$

Autrement dit $x \in E_q$. Par construction de x on a $\Phi_x(e_n) = f(e_n)$. Les formes linéaires continues Φ_x et f coincident sur tous les e_n donc sur le sous-espace V engendré algébriquement par les e_n (c'est-à-dire les combinaisons linéaires finies des e_n), par suite sur l'adhérence de V qui n'est rien d'autre que E_p.

iii) On vient donc de montrer que, pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, le dual de ℓ^p est isométrique à ℓ^q ; donc le bidual de ℓ^p (qui est le dual de ℓ^q) est isométrique à ℓ^p. L'espace de Banach ℓ^p est donc réflexif pour $p \in]1, +\infty[$. □

2.5. Un espace de Banach non réflexif et un espace de Banach non séparable

Nous venons de voir que l'espace de Banach ℓ^p, $p \in]1, +\infty[$ est réflexif. Nous allons montrer que ℓ^1 ne l'est pas. Pour cela nous allons montrer que le dual de ℓ^1 est isométrique à ℓ^∞ (espace des suites réelles (ou complexes) bornées muni de la norme $||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$) mais que le dual de ℓ^∞ n'est pas ℓ^1.

i) Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de ℓ^∞. Considérons l'application linéaire Φ_x : $\ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie en $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\Phi_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n.$$

La série converge bien puisque la suite x_n est bornée et la suite y_n sommable. De façon évidente on a

$$|\Phi_x(y)| \leq ||x||_\infty \cdot ||y||_1$$

qui montre bien que Φ_x est une forme linéaire continue de norme inférieure ou égale à $||x||_\infty$. On a donc une application linéaire $\Phi : x \in \ell^\infty \longrightarrow \Phi_x \in (\ell^1)'$ vérifiant $|||\Phi_x||| \leq ||x||_\infty$; Φ est injective car si $\Phi_x = 0$, alors en évaluant Φ_x sur les vecteurs

$e^k = (\delta_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$ on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n = 0$. Reste à montrer qu'elle vérifie $|||\Phi_x||| \geq ||x||_\infty$ et qu'elle est surjective. Cette dernière propriété s'établit de manière analogue à ce qui a été fait pour l'espace ℓ^p, $p > 1$; elle sera laissée au lecteur. Reprenons la suite $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $e^k = (\delta_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$; on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |x_k| &= |\Phi_x(e^k)| \\ &\leq |||\Phi_x||| \cdot ||e^k||_1 \\ &\leq |||\Phi_x|||. \end{aligned}$$

D'où $||x||_\infty \leq |||\Phi_x|||$. On a donc montré que le dual de ℓ^1 est isométrique à ℓ^∞. □

ii) Soit V le sous-espace de ℓ^∞ dont les éléments sont les suites $x = (x_n)$ qui admettent une limite quand n tend vers $+\infty$. Soit $\theta : V \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire non nulle définie par $\theta(x) = \lim_{n\to+\infty} x_n$. On a $|\theta(x)| \leq ||x||_\infty$ et $|\theta(\delta)| = 1$ où δ est l'élément de ℓ^∞ dont tous les termes sont égaux à 1. Il en résulte que θ est continue de norme égale à 1. D'après le théorème de Hahn-Banach θ se prolonge en une forme linéaire continue $\widetilde{\theta} : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $|||\widetilde{\theta}||| = |||\theta|||$. Soit e^k l'élément $e^k = (e_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $e_n^k = \delta_n^k$; il appartient à tous les espaces ℓ^1, ℓ^∞ et V. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\widetilde{\theta}(e^k) = \theta(e^k) = \lim_{n\to+\infty} e_n^k = 0.$$

Soit $\Psi : \ell^1 \longrightarrow (\ell^1)''$ l'application évaluation qui est une injection isométrique de ℓ^1 dans son bidual $(\ell^1)''$. D'après i), $(\ell^1)'$ est isométrique à ℓ^∞, via l'application $\Phi : \ell^\infty \longrightarrow (\ell^1)'$. Nous allons montrer que $\widetilde{\theta}$ ne peut pas être dans l'image de Ψ. Pour cela il suffit de montrer que, pour tout $x \in \ell^1$ non nul, Ψ_x est non nulle sur au moins l'un des $\Phi(e^k)$. Ce qui établira que $\widetilde{\theta}$ n'est pas de la forme Ψ_x avec $x \in \ell^1$.

Comme $(e^k)_k$ est une base de ℓ^1, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $\xi_k : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\xi_k(e^j) = \delta_k^j$ est une forme linéaire continue de norme 1. On a clairement $\xi_k = \Phi(e^k)$ et donc $\Psi_{e^j}(\xi_k) = \delta_n^j$. Soit $x \in \ell^1$ non nul ; alors $x = \sum_{n=0}^\infty a_k e^k$ où (a_k) est une suite sommable avec un a_{k_0} non nul. Alors $\Psi_x(\xi_{k_0}) = a_{k_0} \neq 0$. Ce qui termine la démonstration. □

iii) Montrons que ℓ^∞ est non séparable ; il suffit pour cela de montrer que pour toute suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $x^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe un élément $z \in \ell^\infty$ non adhérent à l'ensemble $\{x^k : k \in \mathbb{N}\}$. Posons

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |x_n^n| \geq 1 \\ 1 + |x_n^n| & \text{si } |x_n^n| < 1 \end{cases}$$

Il est clair que $z = (z_n)$ est un élément de ℓ^∞. Calculons la distance de z à un élément x^s. Comme $||z - x^s||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n - x_n^s|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$||z - x^s||_\infty \geq |z_n - x_n^s|.$$

En particulier pour $n = s$ on a

$$||z - x^s||_\infty \geq |z_s - x_s^s|.$$

Mais
$$|z_s - x_s^s| \geq \big||z_s| - |x_s^s|\big| \\ \geq 1$$

et donc $||z - x^s||_\infty \geq 1$. □

2.6. Proposition. *Soit A une partie de E. Alors A est bornée si, et seulement si, elle est bornée pour la topologie affaiblie.*

Démonstration. Si A est bornée il est clair qu'elle est bornée pour la topologie affaiblie puisque pour tout $x' \in E'$

$$\sup_{x\in A} |\langle x, x'\rangle| \leq \left(\sup_{x\in A} ||x||\right) |||x'||| < +\infty.$$

Inversement supposons A bornée pour la topologie affaiblie ; elle est alors bornée pour la topologie faible sur E'' (puisque A peut être considérée comme partie de E'' en vertu de la remarque qui suit la proposition VII. 2.1). Comme E' est un espace de Banach A est bornée (d'après la propositon VII. 1.5) dans E'', donc bornée dans E puisque E s'injecte isométriquement dans E''. □

3. Transposition

Soient E et F deux espaces normés et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue.

3.1. Définition. *On appelle* **transposée** *de u l'application $u' : F' \longrightarrow E'$ définie par*

$$u'(y')(x) = y'(u(x)),$$

ou de manière équivalente : pour tout $x \in E$ et tout $y' \in F'$

$$\langle u(x), y'\rangle = \langle x, u'(y')\rangle.$$

On vérifie sans peine que u' *est une application linéaire ; elle est continue de norme égale à celle de u* (*cf.* exercice VII. 4.4).

3.2. Proposition. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces normés E et F. Alors u est continue si, et seulement si, elle est continue pour les topologies affaiblies respectives sur E et F.*

Démonstration. Supposons u continue. Alors pour tout $y' \in F'$ la forme linéaire $y' \circ u$ est continue sur E, donc continue pour la topologie affaiblie (puisque les formes linéaires continues sur E sont les mêmes que les formes linéaires continues pour la topologie affaiblie). Comme $\sigma(F, F')$ est la moins fine des topologies sur F rendant continues les formes linéaires $y' \in F$, u est continue en tant qu'application de E dans F (*cf.* exercice VII. 4.5).

Réciproquement supposons u continue pour les topologies affaiblies sur E et F et soit B la boule unité de E ; alors pour tout $y' \in F'$:

$$\sup_{||x||\leq 1} |\langle u(x), y'\rangle| = \sup_{||x||\leq 1} |\langle x, u'(y')\rangle| = |||u'(y')||| < +\infty.$$

Par suite $u(B)$ est borné pour la topologie affaiblie, donc borné d'après la proposition VII. 2.6. ; donc u est continue car bornée sur la boule unité de E. $\square$

3.3. Un exemple de transposée

Notons $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions réelles continues à support compact dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$||\varphi||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|.$$

Une forme linéaire continue sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est appelée *mesure* sur $\mathbb{R}^n$. Soit f un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une application bijective continue avec inverse f^{-1} continue. Alors f induit une application $u : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$u(\varphi) = \varphi \circ f.$$

Il est facile de voir que u est continue ; c'est même une isométrie de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$; en effet

$$||\varphi \circ f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(f(x))| = \sup_{f^{-1}(x)\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| = ||\varphi||_\infty$$

puisque f est une bijection de $\mathbb{R}^n$.

La transposée u' de u est définie comme suit : si $\mu \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)'$ est une mesure sur $\mathbb{R}^n$ alors $u'(\mu)$ est la mesure

$$u'(\mu)(\varphi) = \langle \mu, \varphi \circ f \rangle.$$

L'image de la mesure de Dirac δ_a en un point a de $\mathbb{R}^n$ est la mesure de Dirac $\delta_{f(a)}$ au point $f(a)$.

On dira qu'une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ est *invariante* par f (ou f-*invariante*) si $u'(\mu) = \mu$. Par exemple si x_0 est un point fixe de f (*i.e.* $f(x_0) = x_0$) alors δ_{x_0} est f-invariante.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par toute translation.

4. Exercices

4.1. Soient E un espace vectoriel et $f_1, \dots, f_k$, k formes linéaires sur E. Montrer que, si f est une forme linéaire sur E telle que

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} f_i \subset \mathrm{Ker} f,$$

alors il existe des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$. (Commencer par le cas $k = 1$ et faire ensuite un raisonnement par récurrence.)

4.2. Soit X un espace topologique. On dira qu'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est

- *semi-continue supérieurement* si, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) < \eta\}$ est ouvert.

- *semi-continue inférieurement* si pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) > \eta\}$ est ouvert.

i) Montrer que f est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement) si, et seulement si, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $f^{-1}([\alpha, +\infty[)$ (resp. $f^{-1}(]-\infty, \alpha]))$ est fermé dans X.

ii) Montrer que f est continue si, et seulement si, elle est semi-continue à la fois supérieurement et inférieurement.

iii) Soient $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions réelles sur X telles que pour tout $x \in X$ l'ensemble $(f_i(x))_{i\in I}$ soit borné. On pose

$$\underline{f} = \inf_{i\in I} f_i \quad \text{et} \quad \overline{f} = \sup_{i\in I} f_i$$

Montrer que, si pour tout $i \in I$, f_i est semi-continue supérieurement (resp. semi-continue inférieurement) alors il en est de même de $\underline{f}$ (resp. $\overline{f}$).

4.3. Soient H l'espace des suites réelles de carré sommable muni de la norme $||x||_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les vecteurs de la forme $e_n = (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $x_i^n = \delta_i^n$ et E le sous-espace engendré par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i.e.* l'ensemble des combinaisons linéaires finies des e_n ; alors l'adhérence de E est H. Soit $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de formes linéaires sur E définies par

$$e'_n(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

i) Calculer la norme de ne'_n.

ii) Montrer que la suite ne'_n est faiblement bornée mais qu'elle n'est pas bornée.

iii) Conclusion ?

4.4. Soient $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue entre deux espaces normés E et F et $u' : F' \longrightarrow E'$ sa transposée. Montrer que u' est continue et a même norme que u.

4.5. Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour tout $i \in I$, soit $u_i : X \longrightarrow X_i$ une application d'un ensemble X dans X_i. On appelle *topologie associée* aux u_i la topologie $\mathcal{T}$ la moins fine sur X rendant continues toutes les applications u_i.

i) Montrer que $\mathcal{T}$ est la topologie engendrée par les $u_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$.

ii) Soit $f : E \longrightarrow X$ une application d'un espace topologique E dans X. Montrer que f est continue si, et seulement si, pour chaque $i \in I$ l'application $E \xrightarrow{u_i \circ f} X_i$ est continue (X étant muni de la topologie associée aux u_i).

4.6. Soient E un espace normé et A une partie de E. On appelle *orthogonal* de A l'ensemble $A^{\perp}$ des formes linéaires $x' \in E'$ telles que $\langle a, x' \rangle = 0$ pour tout $a \in A$.

i) Montrer que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E'.

Soit V un sous-espace vectoriel fermé de E. On désigne par $j : V \hookrightarrow E$ l'inclusion de V dans E par $\pi : E \longrightarrow E/V$ la projection canonique et $j' : E' \longrightarrow V'$ et $\pi' : (E/V)' \longrightarrow E'$ leurs transposées respectives.

ii) Montrer que la suite

$$0 \longrightarrow (E/V)' \xrightarrow{\pi'} E' \xrightarrow{j'} V' \longrightarrow 0$$

(où la première et la dernière flèches sont les applications nulles) est exacte. (Utiliser le théorème de Hahn-Banach.)

iii) Montrer que le dual topologique $(E/V)'$ de E/V est isométrique à $V^{\perp}$ et que le dual topologique V' de V est isométrique à l'espace quotient $E'/V^{\perp}$.

iv) Montrer que si E est réflexif, V et E/V sont réflexifs.

4.7. Soit $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions complexes continues à support compact dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. On pose $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ où, pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\delta_n(f) = f(n)$. Montrer que T est une forme linéaire sur $\mathcal{K}(\mathbb{R})$. Est-elle continue ? (justifier votre réponse).

4.8. On appelle *subdivision* $\mathcal{S}$ de $[0,1]$ toute suite finie $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$. On appelle *variation* d'une fonction $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ relativement à une subdivision (de l'intervalle $[0,1]$) $\mathcal{S} : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ le nombre réel positif $V_{\mathcal{S}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|$.

On appelle *variation totale* de φ le nombre (fini ou égal à $+\infty$)

$$V(\varphi) = \sup_{\mathcal{S}} V_{\mathcal{S}}(\varphi)$$

($\mathcal{S}$ décrit toutes les subdivisions possibles de $[0,1]$). On dira que φ est à *variation bornée* si $V(\varphi) < +\infty$.

Soient $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ à variation bornée et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S} : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$, la subdivision définie par $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. On admet l'assertion qui suit : *la suite formée par les nombres*

$$\mathcal{I}_n(f,\varphi) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))$$

a une limite (quand $n \to +\infty$) qui est un nombre réel $\mathcal{I}(f,\varphi)$. Cette limite est notée $\int_0^1 f(x)d\varphi(x)$ et s'appelle l'*intégrale de Stieltjes* de f par rapport à φ.

i) Soit $\varphi_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, une suite de fonctions convergeant uniformément vers φ. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $V(\varphi_k) \leq C$ pour tout k. Montrer que φ est à variation bornée.

ii) Soit $f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f. Montrer que pour toute fonction φ à variation bornée, la suite $\left(\int_0^1 f_k(x)d\varphi(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 f(x)d\varphi(x)$ quand $k \to +\infty$.

4.9. On utilisera les résultats de l'exercice précédent. Le but est de décrire les formes linéaires continues sur l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$ muni de la norme

$$||f|| = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|.$$

i) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace fermé de l'espace de Banach $\mathcal{B}$ des fonctions bornées $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ muni de la norme qu'on vient de définir.

Soit $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors on sait, d'après le théorème de Hahn-Banach, que F se prolonge en une forme linéaire continue $\widetilde{F}$ sur $\mathcal{B}$ telle que $|||\widetilde{F}||| = |||F|||$. Pour tout $t \in [0,1]$, soit u_t la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$u_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \text{ et } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \neq 0 \text{ et } 0 \leq x < t \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \text{ et } t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ii) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, u_t est un élément de $\mathcal{B}$.

On définit la fonction $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \widetilde{F}(u_t)$.

iii) Montrer que φ est à variation bornée.

Soient la subdivision définie par $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ (déjà considérée dans l'exercice) et $f \in \mathcal{E}$; pour tout $x \in [0,1]$ on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n f(t_i)\left(u_{t_i}(x) - u_{t_{i-1}}(x)\right) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

iv) Montrer que pour tout n, la fonction f_n ainsi définie est une fonction en escalier qu'on explicitera.

v) Montrer que la suite (f_n) converge vers f au sens de la norme $\|\ \|$. (La fonction f étant continue sur un compact, elle est uniformément continue ; donc pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x'| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Choisir alors la subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ telle que tous les intervalles $|t_i, t_{i-1}|$ aient la même longueur $\frac{1}{n} < \eta$.)

vi) Montrer que $\widetilde{F}(f_n) = \sum_{i=1}^n f(t_i)\left(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\right)$.

vii) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \widetilde{F}(f_n) = \int_0^1 f(x)d\varphi(x)$.

viii) En déduire que pour tout élément $f \in \mathcal{E}$ on a $F(f) = \int_0^1 f(x)d\varphi(x)$.

CHAPITRE VIII
Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont des espaces vectoriels sur lesquels on peut définir non seulement une norme complète mais aussi une notion d'angle, donc d'orthogonalité. Ce sont les espaces qui se rapprochent le plus des espaces euclidiens de dimension finie ; on comprend donc à quel point ils sont importants en analyse. Ce chapitre se donne comme but de les définir, d'en donner des exemples et les propriétés les plus remarquables : existence de la projection orthogonale, propriété de réflexivité, caractérisation des bases hilbertiennes...

1. Formes bilinéaires et formes hermitiennes

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Quelquefois on parlera d'espace réel même dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; cela signifie qu'on considère implicitement la structure sous-jacente d'espace vectoriel réel.

1.1. Produit scalaire

On rappelle qu'une *forme bilinéaire* sur E est une application $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in E$ les applications partielles $g(., y) : x \in E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g(x, .) : y \in E \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$g(., y)(x) = g(x, y) \quad \text{et} \quad g(x, .)(y) = g(x, y)$$

soient $\mathbb{R}$-linéaires. On dira que g est *symétrique* si elle vérifie

$$g(x, y) = g(y, x) \qquad \forall x, y \in E.$$

A toute forme bilinéaire g_0 sur E on peut associer une forme bilinéaire symétrique en posant

$$g(x, y) = \frac{g_0(x, y) + g_0(y, x)}{2}.$$

On dira qu'une forme bilinéaire a sur E est *alternée* si elle vérifie

$$a(x, y) = -a(y, x) \qquad \forall x, y \in E.$$

De façon analogue au cas symétrique, à toute forme bilinéaire a_0 on peut associer une forme bilinéaire alternée en posant

$$a(x, y) = \frac{a_0(x, y) - a_0(y, x)}{2}.$$

On appelle *noyau* d'une forme bilinéaire symétrique g sur E l'ensemble

$$\{x \in E : \forall y \in E,\ g(x, y) = 0\} = \{y \in E : \forall x \in E,\ g(x, y) = 0\}.$$

Soit g une forme bilinéaire symétrique sur E. L'application

$$Q : x \in E \longmapsto Q(x) = g(x,x) \in \mathbb{K}$$

est appelée *forme quadratique* associée à g. On dira que g (ou Q) est *non dégénérée* si

$$(\forall y \in E : g(x,y) = 0) \Longrightarrow x = 0.$$

Ce qui revient aussi à dire que le noyau de g est réduit à $\{0\}$. On dira que g (ou Q) est *positive* si $Q(x) \geq 0$ pour tout x, *définie positive* si $Q(x) > 0$ pour tout x non nul. Evidemment si g est définie positive, elle est non dégénérée.

Une forme bilinéaire g symétrique définie positive sur E est appelée *produit scalaire* sur E.. Un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire g est appelé *espace euclidien.*

1.2. Produit hermitien

Supposons E complexe. Une forme *sesquilinéaire* h sur E est une application $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que la première application partielle $h(., z')$ soit $\mathbb{C}$-linéaire et la deuxième application partielle $h(z, .)$ soit anti-linéaire *i.e.* elle vérifie

i) $h(z, z'_1 + z'_2) = h(z, z'_1) + h(z, z'_2)$,

ii) $h(z, \lambda z') = \overline{\lambda} h(z, z')$.

On dira qu'une forme sesquilinéaire h sur E est *hermitienne* si, $\forall z, z' \in E$, on a

$$h(z, z') = \overline{h(z', z)}\ ;$$

ou encore si la forme quadratique associée $Q(z) = h(z,z)$ est réelle.

Soit h une forme hermitienne sur E. Alors h peut s'écrire

$$h(z, z') = g(z, z') + ia(z, z')$$

où g et a sont des formes $\mathbb{R}$-bilinéaires réelles. Il n'est pas difficile de voir que g est symétrique, que a est alternée et qu'on a

$$g(z, z') = a(iz, z') = -a(z, iz')$$

$$a(z, z') = -g(iz, z') = g(z, iz').$$

En plus g et a sont invariantes par l'automorphisme complexe J de E qui à z associe $J(z) = iz$ *i.e.* pour tout $z \in E$ on a

$$g(iz, iz') = g(z, z') \quad \text{et} \quad a(iz, iz') = a(z, z').$$

On dira que h est *positive* si $h(z,z) \geq 0$ pour tout z, *définie positive* si $h(z,z) > 0$ pour tout z non nul. Dans ce cas la forme bilinéaire réelle symétrique g est définie positive. On dira alors que (E, h) est un *espace hermitien.*

1.3. Proposition. *Soit h une forme hermitienne positive sur E. On notera Q la forme quadratique associée. Alors pour tout $z \in E$ et tout $z' \in E$ on a*

(VIII.1) $$|h(z,z')|^2 \leq Q(z)Q(z') \quad \text{(inégalité de Schwarz)}$$

(VIII.2) $$\sqrt{Q(z+z')} \leq \sqrt{Q(z)} + \sqrt{Q(z')} \quad \text{(inégalité de Minkowski)}$$

Démonstration. i) Soient $z, z' \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a

$$0 \leq Q(\lambda z + \mu z', \lambda z + \mu z') = |\lambda|^2 Q(z) + |\mu|^2 Q(z') + \lambda\overline{\mu} h(z,z') + \overline{\lambda}\mu\overline{h(z,z')}.$$

Supposons λ réel et prenons $\mu = h(z,z')$; alors l'inégalité précédente devient

$$P(\lambda) = \lambda^2 Q(z) + 2\lambda|h(z,z')|^2 + |h(z,z')|^2 Q(z') \geq 0.$$

Comme cette inégalité a lieu pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le discriminant du polynôme du second degré en λ, $P(\lambda)$, est négatif ou nul. Ce qui donne l'inégalité cherchée

(VIII.3) $$|h(z,z')|^2 \leq Q(z)Q(z').$$

ii) Notons g la partie réelle de h qui est une forme bilinéaire réelle positive. Pour tous $z, z' \in E$, on a $Q(z+z') = Q(z) + Q(z') + 2g(z,z')$. Par l'inégalité de Schwarz on obtient $Q(z+z') \leq Q(z) + Q(z') + 2\sqrt{Q(z)Q(z')}$, c'est-à-dire

(VIII.4) $$\sqrt{Q(z+z')} \leq \sqrt{Q(z)} + \sqrt{Q(z')}$$

ce qu'il fallait établir. □

2. Généralités sur les espaces de Hilbert

Soit E un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique g dans le cas réel ou d'une forme hermitienne h dans le cas complexe. On suppose que la forme quadratique Q associée (à g ou à h) soit définie positive. Alors on peut munir E d'une norme $|| \quad ||$ en posant

(VIII.5) $$||x|| = \sqrt{Q(x)}.$$

Dorénavant la forme bilinéaire g (ou la forme hermitienne h) sera notée $\langle \ , \ \rangle$. L'espace E muni de la norme associée à $\langle \ , \ \rangle$ sera appelé *espace préhilbertien.*

2.1. Définition. *Un* **espace de Hilbert** *est un espace préhilbertien complet.*

Soient $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace préhilbertien et x et y deux vecteurs de E. On dira que x et y sont *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$. Soit A une partie de E ; on

appelle *orthogonal* de A l'ensemble $A^{\perp} = \{x \in E : \forall y \in A : \langle x, y \rangle = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de E.

2.2. Proposition. *Sur un espace préhilbertien E on a l'identité suivante (dite du parallélogramme)*

(VIII.6) $$\forall x, y \in E \quad ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

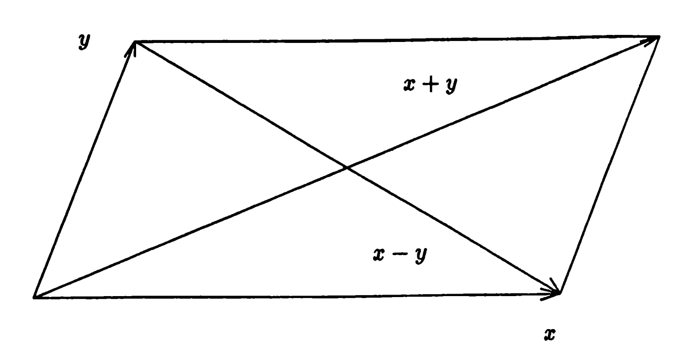


Fig. 4

Démonstration. On a $||x+y||^2 = \langle x+y, x+y \rangle = ||x||^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + ||y||^2$. De même $||x-y||^2 = \langle x-y, x-y \rangle = ||x||^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + ||y||^2$. En faisant la somme membre à membre on obtient l'égalité cherchée. □

Si x et y sont orthogonaux on a l'égalité suivante connue sous le nom de *théorème de Pythagore* : $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

Donnons quelques exemples d'espaces préhilbertiens et hilbertiens réels et complexes.

2.3. Exemples

i) L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ est un espace de Hilbert réel.

ii) L'espace $\mathbb{C}^n$ muni du produit hermitien $\langle z, z' \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z'_k}$ est un espace de Hilbert complexe.

iii) Soit X un espace métrique compact muni d'une mesure de probabilité μ positive sur les ouverts et notons $C^0(X, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes continues sur X. Soient $f, g \in C^0(X, \mathbb{C})$; on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

Alors $C^0(X, \mathbb{C})$ muni de ce produit hermitien est un espace préhilbertien complexe.

iv) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors l'espace $L^2(\Omega, \mu)$ des classes (modulo l'égalité presque partout) de fonctions réelles de carré intégrable muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(\omega)g(\omega)d\mu(\omega)$ est un espace de Hilbert réel.

Si $\Omega = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage alors $L^2(\Omega, \mu)$ n'est rien d'autre que l'espace ℓ^2 des suites réelles de carré sommable qui est un espace de Hilbert quand

on le munit du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k$. C'est l'espace de Hilbert de dimension infinie qui généralise de façon immédiate l'exemple i).

Soient E un espace préhilbertien, A une partie de E et x un vecteur de E. La distance de x à A est par définition $\inf ||x-y||$ quand y parcourt A. En général il n'y a aucune raison que cette distance soit réalisée par un élément de A ; mais si A est convexe complète on peut toujours trouver un tel élément. De façon plus précise on a le

2.4. Théorème. *Soient A une partie convexe complète de E et $x \in E$. Il existe un vecteur $x_0 \in A$ tel que*

i) $d(x, A) = \inf_{y\in A} ||x-y|| = ||x-x_0||$.

ii) $\forall z \in A$ *on a*

$$\mathcal{R}\langle x-x_0, x_0-z\rangle \geq 0, \tag{VIII.7}$$

où pour tout nombre complexe ω, $\mathcal{R}\omega$ désigne sa partie réelle.

iii) Le vecteur x_0 est unique.

Démonstration. i) Posons $\delta = d(x, A)$; alors il existe une suite (y_n) dans A telle que $||x-y_n||^2$ converge vers δ^2 ; c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ on a $||x-y_n||^2 \leq \delta^2+\varepsilon^2$ pour n assez grand.

Appliquons l'identité du parallélogramme aux vecteurs $x-y_n$ et $x-y_p$. On a $||(x-y_n)-(x-y_p)||^2 + ||(x-y_n)+(x-y_p)||^2 = 2(||x-y_n||^2 + ||x-y_p||^2)$. Comme A est convexe $\frac{y_n+y_p}{2} \in A$; par suite

$$\left|\left|x - \frac{y_n+y_p}{2}\right|\right|^2 \geq \delta^2.$$

D'où pour n et p assez grands

$$||y_n-y_p||^2 = 2\left(||x-y_n||^2 + ||x-y_p||^2 - 2\left|\left|x-\frac{y_n+y_p}{2}\right|\right|^2\right) \leq 4\varepsilon^2.$$

La suite (y_n) est donc de Cauchy dans la partie A qui est complète. Elle y converge donc vers un élément x_0 qui vérifiera nécessairement $||x_0-x|| = \delta$.

ii) Soient $z \in A$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors comme A est convexe le vecteur $(1-\lambda)x_0+\lambda z$ est dans A ; et puisque x_0 réalise la distance minimale entre x et A on a

$$||x-[(1-\lambda)x_0+\lambda z]||^2 \geq ||x-x_0||^2.$$

En écrivant $x-[(1-\lambda)x_0+\lambda z]$ sous la forme $(x-x_0)+\lambda(x_0-z)$ et en calculant le carré de sa norme on obtient

$$||x-x_0||^2 + 2\lambda\mathcal{R}\langle x-x_0, x_0-z\rangle + \lambda^2||x-x_0||^2 \geq ||x-x_0||^2.$$

C'est-à-dire $\lambda(2\mathcal{R}\langle x-x_0, x_0-z\rangle + \lambda||x_0-z||^2) \geq 0$. Une telle inégalité est vérifiée pour tout $z \in A$ et tout $\lambda \in [0,1]$ si, et seulement si $\mathcal{R}\langle x-x_0, x_0-z\rangle \geq 0$. Ce qui démontre le point ii).

iii) Soit $z \in A$ différent de x_0. Alors

$$||x - z||^2 = ||x - x_0||^2 + ||x_0 - z||^2 + 2\mathcal{R}\langle x - x_0, x_0 - z\rangle.$$

Comme $\mathcal{R}\langle x - x_0, x_0 - z\rangle \geq 0$ on obtient

$$||x - z||^2 \geq ||x - x_0||^2 + ||x_0 - z||^2 > ||x - x_0||^2.$$

Ce qui démontre l'unicité de x_0. □

Supposons maintenant que A est un sous-espace vectoriel V complet de E. En appliquant l'inégalité (VIII. 7) à $z = 0$ et $z = 2x_0$ on obtient $\mathcal{R}\langle x - x_0, x_0\rangle = 0$. Puis à $(x_0 - z) \in V$ et $(x_0 + z) \in V$, on obtient $\forall z \in V \quad \mathcal{R}\langle x - x_0, z\rangle = 0$. On a donc le

2.5. Théorème. *Soit V un sous-espace complet d'un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Alors il existe une application $p_V : E \longrightarrow V$ associant à tout point $x \in E$ un point $x_0 = p_V(x)$ réalisant la distance minimale de x à V et caractérisé par*

$$\forall z \in V \quad \mathcal{R}\langle x - x_0, z\rangle = 0.$$

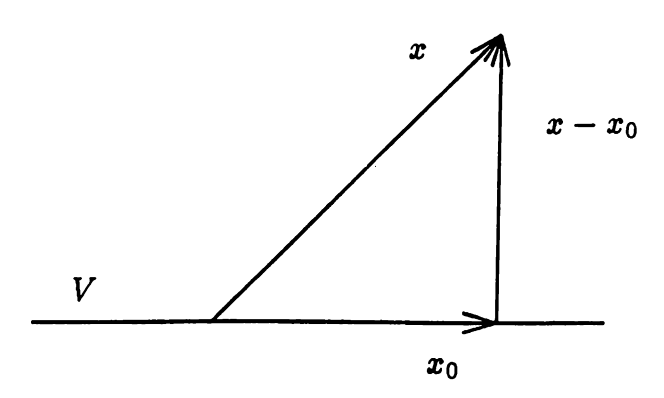


Fig. 5

Il est facile de voir que l'application $p_V : E \longrightarrow V$ est linéaire (on applique la propriété caractéristique pour le prouver). En plus elle est continue, de norme $|||p_V||| = 1$ si V est non réduit à $\{0\}$; en effet pour tout $x \in E$ on a $||x||^2 = ||x - x_0||^2 + ||x_0||^2$. Donc $||p_V(x)|| \leq ||x||$; et comme p_V vaut l'identité sur V on a $|||p_V||| = 1$. L'application P_V est appelée *projection orthogonale* de E sur V.

Il est immédiat de voir que le noyau de la projection p_V est l'orthogonal $V^\perp$ de V. On a bien entendu $E = V \oplus V^\perp$ puisque pour tout $x \in E$ on a $x = x_0 + x - x_0$.

Lorsque E est un espace de Hilbert, la condition de complétude de V est équivalente à la fermeture de V ; il suffit donc de supposer que V est fermé.

3. Dualité dans les espaces de Hilbert

Sur un espace préhilbertien E le produit scalaire (ou hermitien) permet de définir une classe particulière de formes linéaires continues en l'occurrence celles qui sont

de la forme $\varphi_y : x \in E \longrightarrow \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ où $y \in E$. En effet φ_y est linéaire ; d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||.||y||$. Donc φ_y est continue de norme $\leq ||y||$; si on prend $x = \frac{y}{||y||}$ on obtient $|\langle x, y\rangle| = ||y||$. Donc φ_y a même norme que y. Comme $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $x \in E$, implique $y = 0$, φ est injective et par suite $\varphi : y \in E \longrightarrow \varphi_y \in E'$ est une application anti-linéaire isométrique injective (anti-linéaire car $\varphi_{\lambda y} = \overline{\lambda}\varphi_y$).

Lorsque E est un espace de Hilbert, il n'y a pas d'autres formes linéaires continues sur E que celles du type φ_y avec $y \in E$ comme on va le démontrer dans le théorème qui suit.

3.1. Théorème. *Soit E un espace de Hilbert. Alors $\varphi : E \longrightarrow E'$ est une bijection anti-linéaire isométrique.*

Démonstration. Il n'y a que la surjectivité à établir ; le reste a déjà été fait. Soit u une forme linéaire continue sur E. Si $u = 0$ on a alors de manière évidente $u = \varphi_0$. Supposons u non nulle et notons H son noyau qui est un hyperplan fermé (donc complet) de E ; si a est un élément non nul orthogonal à H on vérifie aisément que $x \in H$ si, et seulement si, $x \in \mathrm{Ker}\varphi_a$ *i.e.* u et φ_a ont même noyau ; comme $\mathrm{codim}H = 1$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u = \alpha\varphi_a$, c'est-à-dire $u = \varphi_{\overline{\alpha}a}$ *i.e.* u est l'image de $y = \overline{\alpha}a$ par l'application $\varphi : E \longrightarrow E'$. □

3.2. Proposition. *Soit E un espace de Hilbert (réel ou complexe). Alors le dual topologique E' de E admet une structure canonique d'espace de Hilbert.*

Démonstration. Soient $x', y' \in E'$; par le théorème VIII. 3.1, il existe deux vecteurs $x, y \in E$ tels que $x' = \varphi_x$ et $y' = \varphi_y$. On pose $\langle x', y'\rangle = \langle y, x\rangle$. De cette manière on définit sur E' un produit scalaire (si E est réel) ou un produit hermitien (si E est complexe) ; en effet $\langle \lambda x', y'\rangle = \langle (\overline{\lambda}x)', y'\rangle = \langle y, \overline{\lambda}x\rangle = \lambda\langle y, x\rangle = \lambda\langle x', y'\rangle$. On démontre de même que $\langle x', \lambda y'\rangle = \overline{\lambda}\langle x', y'\rangle$. L'additivité est évidente. On a d'autre part $\langle x', x'\rangle = \langle x, x\rangle$. Ce qui montre que la forme $(x', y') \longrightarrow \langle x', y'\rangle$ ainsi définie est à la fois hermitienne et définie positive. L'espace E' muni du produit hermitien qu'on vient de définir est anti-isomorphe à E. □

3.3. Proposition. *Tout espace de Hilbert E est réflexif.*

Démonstration. Soient $\varphi : E \longrightarrow E'$ (resp. $\varphi' : E' \longrightarrow E''$) l'application qui à x associe la forme linéaire continue φ_x (resp. à x' associe $\varphi_{x'}$) telle qu'on vient de la définir et $\Phi : E \longrightarrow E''$ l'application évaluation *i.e.* définie par $\Phi_x(y') = y'(x)$. Soit $x \in E$ quelconque. Alors pour tout $y' \in E'$ on a $\Phi_x(y') = y'(x) = \langle x, y\rangle$ où y est tel que $\varphi_y = y'$ (*cf.* théorème VIII. 3.1). D'autre part ${\varphi'}_{\varphi_x}(y') = \langle y', \varphi_x\rangle$ qui est égal par définition (voir démonstration de la propostion VIII. 3.2) à $\langle x, y\rangle$. Donc pour tout $x \in E$ on a $\Phi_x = \varphi' \circ \varphi(x)$ qui montre bien que l'application canonique $\Phi : E \longrightarrow E''$ est un isomorphisme (c'est le composé de deux anti-isomorphismes). Par suite E est réflexif. □

4. Sommes et bases hilbertiennes

Dans toute la suite $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ sera un espace de Hilbert. Si $(V_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces fermés orthogonaux deux à deux, V_0 sera le sous-espace

engendré algébriquement par tous les V_i. L'adhérence V de V_0 est appelée *somme hilbertienne* des sous-espaces V_i.

4.1. Théorème. *Le sous-espace V est constitué des vecteurs de E de la forme $\sum_{i\in I} x_i$ où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable avec $x_i \in V_i$ pour tout $i \in I$. On a d'autre part $\left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|^2 = \sum_{i\in I} ||x_i||^2$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de I. Soit $x \in E$ tel que $x = \sum_{i\in I} x_i$ avec $x_i \in V_i$. Comme par définition $x = \lim_{J\in\mathcal{F}} \sum_{i\in J} x_i$ on voit tout de suite que $x \in V$.

Soit $x \in V$ et notons $x_i = p_i(x)$ la projection orthogonale de x sur V_i. On vérifie facilement que si $J \in \mathcal{F}$ la projection orthogonale de x sur $V_J = \oplus_{i\in J} V_i$ est égale à $x_J = \sum_{i\in J} x_i$ et d'autre part que $||x||^2 = ||x_J||^2 + ||x - x_J||^2$. On a $x = \lim_{J\in\mathcal{F}} x_J$ qui n'est rien d'autre que $\sum_{i\in I} x_i$; ce qui montre bien que $(x_i)_i$ est bien une famille sommable définissant x. □

Soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I}$ un système de vecteurs dans E. On dira que $\mathcal{E}$ est *orthogonal* si on a $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$, *orthonormé* (ou *orthonormal*) si pour tout i et tout j dans I on a $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_i^j$. Un système orthonormé est toujours libre. En effet soient $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une partie finie de $\mathcal{E}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$; soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Alors $0 = \langle e_k, \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n\rangle = \lambda_k$ ce qui montre que toute partie finie de $\mathcal{E}$ est libre *i.e.* le système $\mathcal{E}$ est libre.

Dans toute la suite $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I}$ sera un système orthonormal de E. L'objet de ce qui suit est de voir dans quelles conditions ce système suffit, en un sens à préciser, à engendrer tout l'espace.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une partie orthonormale de E et notons M le sous-espace (nécessairement fermé) de E engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$.

4.2. Proposition. *La projection orthogonale x_0 d'un vecteur x de E sur le sous-espace M est donnée par $x_0 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$.*

Démonstration. Comme $x_0 \in M$, on peut écrire $x_0 = \sum_{k=1}^n a_k e_k$. D'autre part on doit avoir pour tout $k = 1, \ldots, n$: $\langle x - x_0, e_k\rangle = 0$ *i.e.*

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^n a_k e_k, e_k \right\rangle = 0.$$

Ce qui donne $a_k = \langle x, e_k\rangle$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. La proposition est donc démontrée. □

De cette proposition on déduit que pour toute partie finie J de I on a

$$\sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 = ||x||^2 - d(x, M)^2$$

où $d(x, M)$ désigne la distance de x à M. Ceci nous donne l'inégalité qui suit (dite *inégalité de Bessel*)

(VIII.8) $$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq ||x||^2.$$

On rappelle que le nombre de termes non nuls dans la somme $\sum_{i\in I}|\langle x,e_i\rangle|^2$ est au plus dénombrable. En effet pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ l'ensemble

$$\text{(VIII.9)} \qquad I_n=\left\{i\in I \ : \ |\langle x,e_i\rangle|>\frac{1}{n}\right\}$$

est fini. Comme $I_+=\{i\in I : |\langle x,e_i\rangle|\neq 0\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}I_n$, I_+ est au plus dénombrable.

L'inégalité de Bessel nous permet de définir une application linéaire continue de norme ≤ 1 de E dans l'espace $\ell^2(I)$ (des fonctions de carré intégrable sur l'espace mesurable $(I,\mathcal{P}(I))$ muni de la mesure de comptage notée habituellement m) : à x on associe $\widehat{x}\in\ell^2(I)$ donné par $\widehat{x}(i)=\langle x,e_i\rangle$.

4.3. Théorème. *L'application $x\in E\longrightarrow\widehat{x}\in\ell^2(I)$ est surjective.*

Démonstration. Soit $u\in\ell^2(I)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ notons $\mathbf{1}_{I_n}$ la fonction indicatrice de la partie finie I_n : $\{i\in I : u(i)>\frac{1}{n}\}$ et posons $x_n=\sum_{i\in I_n}u(i)e_i$. Alors $\widehat{x}_n=u.\mathbf{1}_{I_n}$. Pour $i\in I$ fixé la suite des scalaires $\widehat{x}_n(i)$ converge vers $u(i)$ *i.e.* $\widehat{x}_n$ converge simplement vers u. D'autre part on a de manière évidente, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $i\in I$: $|u(i)-\widehat{x}_n(i)|^2\leq|u(i)|^2$. On voit donc que la suite de fonctions $|u-\widehat{x}_n|^2$, définies sur l'espace mesuré $(I,\mathcal{P}(I),m)$, converge simplement vers la fonction nulle et est dominée par la fonction intégrable $|u|^2$. D'après le théorème de Lebesgue la suite des intégrales

$$\int_I|u(i)-\widehat{x}_n(i)|^2dm(i)$$

converge vers 0 *i.e.* $||u-\widehat{x}_n||_2\to 0$ (où $||\ \ ||_2$ désigne la norme dans $\ell^2(I)$) ; la suite $(\widehat{x}_n)$ est donc de Cauchy dans $\ell^2(I)$; comme pour tout n, x_n est une combinaison linéaire finie des e_i (qui forment un système orthonormal), le carré de la norme de x_n est égal à $\sum_{i\in I_n}|u(i)|^2$ et on a $||x_n-x_p||=||\widehat{x}_n-\widehat{x}_p||_2$; ce qui montre que la suite (x_n) est de Cauchy dans E ; elle y converge donc vers un élément $x\in E$; par construction x vérifie

$$\widehat{x}(i)=\langle x,e_i\rangle=\lim_{n\to+\infty}\langle x_n,e_i\rangle=\lim_{n\to+\infty}\widehat{x}_n(i)=u(i).$$

i.e. $\widehat{x}=u$. □

Nous allons maintenant donner quelques critères permettant de décider de la maximalité du système orthonormal $\mathcal{E}=(e_i)_{i\in I}$.

4.4. Théorème. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $\mathcal{E}$ est **maximal** *(i.e. n'est strictement contenu dans aucun autre système orthonormal),*

ii) le sous-espace vectoriel V_0 engendré algébriquement par les vecteurs e_i est dense dans E,

iii) pour tout $x\in E$ on a $||x||^2=\sum_{i\in I}|\widehat{x}(i)|^2$ (égalité de Parseval),

iv) pour tout $x\in E$ et tout $y\in E$ on a $\langle x,y\rangle=\sum_{i\in I}\widehat{x}(i)\overline{\widehat{y}(i)}$.

On dira que $\mathcal{E}$ est *total* ou que $\mathcal{E}$ est une *base hilbertienne* de E si $\mathcal{E}$ vérifie l'une des conditions équivalentes du théorème qu'on vient d'énoncer.

Démonstration. Elle se fera comme suit $i) \Longrightarrow ii) \Longrightarrow iii) \Longrightarrow iv) \Longrightarrow i)$.

$i) \Longrightarrow ii)$

Supposons que V_0 n'est pas dense ; son adhérence V est strictement contenue dans E. Il existe alors un vecteur e non nul (de norme 1) de E orthogonal à tous les e_i ; le système $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{e\}$ est orhonormal et contient strictement $\mathcal{E}$; ceci contredit la maximalité de $\mathcal{E}$, donc $V = E$ *i.e.* V_0 est dense dans E.

$ii) \Longrightarrow iii)$

Soit $x \in E$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de vecteurs $e_{i_1}, \dots e_{i_n}$ et des scalaires $\lambda_{i_1}, \dots \lambda_{i_n}$ tels que $||x - z|| < \varepsilon$ avec $z = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} e_{i_k}$. Soit x_0 la projection orthogonale de x sur le sous-espace M de dimension finie (donc fermé dans E) engendré par les vecteurs $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$; alors x_0 est donné par $x_0 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_{i_k}\rangle e_{i_k} = \sum_{k=1}^n \widehat{x}(i_k) e_{i_k}$ avec en plus $||x_0||^2 = \sum_{k=1}^n |\widehat{x}(i_k)|^2$.

On a alors $||x - x_0|| \leq ||x - z|| < \varepsilon$. Ce qui implique

$$(||x|| - \varepsilon)^2 < ||x_0||^2 = \sum_{k=1}^n |\widehat{x}(i_k)|^2.$$

Mais

$$\sum_{k=1}^n |\widehat{x}(i_k)|^2 \leq \sum_{i \in I} |\widehat{x}(i)|^2.$$

Ce qui donne finalement $(||x|| - \varepsilon)^2 < \sum_{i \in I} |\widehat{x}(i)|^2$. Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ on a $||x||^2 \leq \sum_{i \in I} |\widehat{x}(i)|^2$. De cette inégalité et de celle de Bessel on déduit alors $||x||^2 = \sum_{i \in I} |\widehat{x}(i)|^2$. Ce qui démontre l'implication $ii) \Longrightarrow iii)$.

$iii) \Longrightarrow iv)$

Notons $\langle \ , \ \rangle_2$ le produit scalaire ou hermitien sur $\ell^2(I)$. Alors l'assertion iii) signifie que pour tout $x \in E$ on a $\langle x, x\rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{x}\rangle_2$. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. La condition iii) nous donne $\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle \widehat{x} + \lambda \widehat{y}, \widehat{x} + \lambda \widehat{y}\rangle_2$. C'est-à-dire

$$\overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle = \overline{\lambda}\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle_2 + \lambda\langle \widehat{y}, \widehat{x}\rangle_2.$$

Prenons $\lambda = 1$; alors cette égalité devient $\mathcal{R}\langle x, y\rangle = \mathcal{R}\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle_2$. Si on prend cette fois-ci $\lambda = i$ l'égalité devient $\mathcal{I}\langle x, y\rangle = \mathcal{I}\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle_2$. où pour tout nombre complexe ω, $\mathcal{I}\omega$ désigne sa partie imaginaire. Les deux scalaires $\langle x, y\rangle$ et $\langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle_2$ ont même partie réelle et même partie imaginaire. Ils sont donc égaux.

$iv) \Longrightarrow i)$

Supposons l'assertion i) fausse *i.e.* que $\mathcal{E}$ n'est pas maximal. Alors il existe un vecteur $e \in E$ de norme 1 orthogonal à tous les vecteurs du système $\mathcal{E}$. Si on pose $x = y = e$ l'assertion iv) nous dit que $\langle x, y\rangle = 0$ alors que $\langle x, y\rangle = ||e||^2 = 1$; contradiction, donc $\mathcal{E}$ est maximal. □

Soient E et F deux espaces de Hilbert. Une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est dite *unitaire* si, $\forall x, y \in E$, on a $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ autrement dit u préserve le produit scalaire des vecteurs. Une telle application est une isométrie puisque $||u(x)||^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, x\rangle = ||x||^2$; c'est donc une application continue. Lorsque u est bijective on dira que u est un *isomorphisme d'espaces de Hilbert.* Quand $E = F$ on dira que u est un *automorphisme* de l'espace de Hilbert E.

L'assertion iv) du théorème VIII. 4.4. signifie que l'application $x \in E \longrightarrow \widehat{x} \in \ell^2(I)$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

Lorsque $I = \mathbb{N}$, l'espace de Hilbert E est isomorphe à l'espace ℓ^2 des suites de carré sommable muni du produit hermitien habituel $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y}_n$. On dira dans ce cas que E est *séparable.* Il existe des espaces de Hilbert non séparables. Le lecteur peut vérifier, à titre d'exercice, que $L^2(\mathbb{R}, m)$, où $\mathbb{R}$ est muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et de la mesure de comptage m, en est un exemple.

Dans un espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$ il existe toujours des systèmes orthonormés. Il suffit de prendre un vecteur et de le normer ou n'importe quelle famille dénombrable libre et lui appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Le théorème qui suit affirme l'existence de bases hilbertiennes sur n'importe quel espace de Hilbert.

4.5. Théorème. *Soit $\mathcal{E}_0$ un système orthonormal de E. Alors il existe une base hilbertienne $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{E}_0$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble (non vide) de tous les systèmes orthonormés de E contenant $\mathcal{E}_0$ ordonné par inclusion. Alors $\mathcal{S}$ contient une partie maximale totalement ordonnée $\mathcal{S}_0$. La réunion $\mathcal{E} = \bigcup S$, où S parcourt $\mathcal{S}_0$, est un système orthonormal maximal contenant $\mathcal{E}_0$. En effet, soient x, y deux éléments de $\mathcal{E}$; alors il existe $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_0$ tels que $x \in S_1$ et $y \in S_2$. Mais comme $\mathcal{S}_0$ est totalement ordonnée on a $S_1 \subset S_2$ ou $S_2 \subset S_1$; supposons pour fixer les idées $S_1 \subset S_2$. Alors $x, y \in S_2$, donc $\langle x, y\rangle = 0$ si $x \neq y$ et $\langle x, y\rangle = 1$ si $x = y$ car S_2 est orthonormal. Donc $\mathcal{E}$ est orthonormal. La maximalité de $\mathcal{E}$ se démontre de la manière habituelle déjà utilisée dans ce cours. □

Nous allons terminer ce chapitre par un exemple important de base hilbertienne sur l'espace de Hilbert des fonctions mesurables de carré intégrable sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

5. Un exemple de base hilbertienne

Il sera traité de façon sommaire. Pour plus de détails on peut consulter [CCM1]. Le cercle, qu'on notera $\mathbb{S}^1$, peut être vu comme le sous-groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Un élément $z \in \mathbb{S}^1$ peut être repéré par son angle θ (qui varie dans $\mathbb{R}$) avec l'axe des réels. L'application $p : \theta \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{i\theta}$ est un homomorphisme surjectif du groupe additif $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}^1$. Une fonction f sur $\mathbb{S}^1$ est donc une fonction $\widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\widetilde{f}(\theta + 2\pi) = \widetilde{f}(\theta)$ *i.e.* $\widetilde{f}$ est une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ de période 2π. Dans toute la suite on ne distinguera pas f sur $\mathbb{S}^1$ de la fonction périodique $\widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ qu'elle définit et qui est nécessairement de la forme $\widetilde{f} = f \circ p$. Sur l'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$ des fonctions complexes de carré intégrable sur $\mathbb{S}^1$ (qui sera donc par définition l'espace des fonctions périodiques de période 2π sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à l'intervalle $[0, 2\pi]$ est de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue) on a le produit hermitien

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)} d\lambda(\theta)$$

qui en fait un espace de Hilbert. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $e^{in\theta}$ est dans $L^2(\mathbb{S}^1)$ et il est facile de voir que le système $\mathcal{E} = (e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormal. Nous allons indiquer comment on peut montrer que $\mathcal{E}$ est en fait une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}^1)$. Pour cela nous aurons besoin de rappeler le théorème de Stone-Weierstrass ; il est d'une grande importance parce qu'il donne des conditions permettant d'approcher uniformément les fonctions continues sur un espace métrique compact par des éléments particuliers. Nous énoncerons ce théorème (le lecteur désirant avoir une démonstration peut consulter [CCM1] ou [Ru]).

Soient X un espace métrique compact ayant au moins deux éléments et $C^0(X, \mathbb{C})$ l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur X muni de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Sur $C^0(X, \mathbb{C})$ on peut mettre une structure multiplicative en posant pour $f, g \in C^0(X, \mathbb{C})$ $(f.g)(x) = f(x)g(x)$; on vérifie facilement que $||f.g||_\infty \leq ||f||_\infty.||g||_\infty$. On dira que $C^0(X, \mathbb{C})$ est une *algèbre de Banach.* Une sous-algèbre de $C^0(X, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel A stable par multiplication *i.e.* si $f, g \in A$ alors $f.g \in A$. On dira que A *sépare les points* de X si, pour tous points distincts $x, y \in X$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

5.1. Théorème de Stone-Weierstrass. *Soit A une sous-algèbre de $C^0(X, \mathbb{C})$ séparant les points et telle que pour tout $x \in X$, il existe $f \in A$ vérifiant $f(x) \neq 0$. Alors A est dense dans $C^0(X, \mathbb{C})$.*

Ce théorème dit, par exemple, que l'ensemble des fonctions polynômes sur l'intervalle compact $[0, 1]$ est dense dans $C^0([0, 1], \mathbb{C})$.

5.2. Quelques remarques

i) Le cercle $\mathbb{S}^1$ est un espace métrique compact (la distance entre deux points est égale à la longueur du plus petit arc qui les joint). On peut donc appliquer à une sous-algèbre A de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ (vérifiant les conditions qu'il faut) le théorème de Stone-Weierstrass.

ii) $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel (non fermé) de $L^2(\mathbb{S}^1)$ pour la norme L^2, $||\ \ ||$. On a d'autre part : $||f|| \leq ||f||_\infty$ pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$. Donc si une partie de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ est dense pour la norme de la convergence uniforme, elle sera dense pour la norme $||\ \ ||$.

iii) Soit A le sous-espace vectoriel engendré algébriquement par les vecteurs $e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$. Les éléments de A sont les *polynômes trigonométriques*

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k e^{ik\theta} \qquad \text{avec} \qquad n_0, n_1 \in \mathbb{Z}.$$

Il est facile de voir que le produit de deux polynômes trigonométriques est encore un polynôme trigonométrique ; A est donc une sous-algèbre de $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$. On vérifie facilement aussi que les éléments de A séparent les points de $\mathbb{S}^1$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass : *La sous-algèbre A est dense dans $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ pour la norme $||\ \ ||_\infty$ donc dense pour la norme $||\ \ ||$ induite par $L^2(\mathbb{S}^1)$.*

La complétude du système $\mathcal{E} = (e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ découle alors de manière évidente du théorème qui suit qu'on admettra et dont on peut trouver une démonstration dans [Ru] par exemple.

5.3. Théorème. *L'espace $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2(\mathbb{S}^1)$ pour la norme $\| \ \|$.*

Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ se développe donc sous forme de *série de Fourier*

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} \tag{VIII.10}$$

où les nombres c_n, appelés *coefficients de Fourier* de f, sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta. \tag{VIII.11}$$

Les coefficients c_n ne changent pas si on perturbe la fonction f sur un ensemble de mesure nulle. Ce qui explique le fait qu'en général la somme de la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ ne converge pas simplement vers f. Toutefois si, en θ, f admet une imite à droite $f(\theta + 0)$ et une limite à gauche $f(\theta - 0)$ et satisfait la condition suivante qu'on appelle *condition de Dini* : il existe $\delta > 0$ tel que l'intégrale

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(\theta+t) - f(\theta)}{t}\right| dt$$

existe alors, au point θ, la série de Fourier de f converge vers la demi-somme $\frac{1}{2}\{f(\theta+0) + f(\theta-0)\}$ (*cf.* [KF]). Par exemple si f est continue sur $]\theta-\delta, \theta+\delta[$ et admet en θ une dérivée à gauche et une dérivée à droite, alors sa série de Fourier en θ converge vers $f(\theta)$. Mais si on se donne θ, on peut toujours trouver un ensemble "très grand" de fonctions continues f pour lesquelles la série de Fourier en θ ne converge pas vers $f(\theta)$ (*cf.* exercice X. 6.11).

Il existe des conditions suffisantes de convergence plus générales que celle qu'on vient de donner : le lecteur désirant plus de détails peut consulter par exemple [Da], [Ko], [WM] ou [Ka]. Toutefois, on peut au moins signaler un célèbre théorème dû à L. Carleson (*cf.* [Cs]) qui s'énonce ainsi : *la série de Fourier de toute fonction $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ converge presque partout vers f.* Ceci répond négativement à une question posée par N. N. Lusin en 1915 : *existe-t-il des fonctions $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ dont la série de Fourier diverge sur un ensemble de mesure strictement positive ?*

5.4. Exemple

Nous allons donner le développement de Fourier d'une fonction explicite et l'utiliser pour calculer la somme de certaines séries numériques (tout ceci est bien familier aux étudiants de deuxième année de DEUG !).

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction périodique de période 2π définie sur $[-\pi, +\pi[$ par $f(\theta) = \theta^2$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, dérivable pour $\theta \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et, en tout point $(2k+1)\pi$, admet une dérivée à droite

égale à -2π et une dérivée à gauche égale à 2π. Sa série de Fourier converge donc partout vers f. Les coefficients de Fourier c_n ($n \in \mathbb{Z}$) de f sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta.$$

Comme f est paire, le changement de θ en $-\theta$ dans l'intégrale montre que $c_n = c_{-n}$. Ce qui permet d'écrire

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta$$

avec $a_0 = c_0$ et $a_n = 2c_n$. De façon explicite

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \theta^2 d\theta \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \theta^2 \cos n\theta d\theta \ \text{ pour } n \geq 1.$$

Le calcul donne alors

$$f(\theta) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\theta}{n^2}.$$

Pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ on obtient les valeurs respectives des séries numériques

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Exercices

6.1. Soit $(E, || \ ||)$ un espace normé réel tel que pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$ on ait $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ *i.e.* x et y vérifient l'identité du parallélogramme.

Montrer que la norme $|| \ ||$ peut être associée à un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$.

6.2. Donner une démonstration facile de la forme analytique du théorème de Hahn-Banach dans le cas d'un espace de Hilbert.

6.3. Soient (E, d) un espace métrique et M une partie de E. On dira que $A \subset E$ est un *ε-réseau* (avec $\varepsilon > 0$) pour M si, pour tout $m \in M$, il existe $a \in A$ tel que $d(a, m) \leq \varepsilon$. Si $\varepsilon' \geq \varepsilon$ alors tout ε-réseau est un ε'-réseau. On dira que M est *totalement bornée* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ε-réseau fini pour M.

i) Montrer que dans E toute partie totalement bornée est bornée au sens usuel.

ii) Montrer que toute partie bornée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est totalement bornée.

On suppose que E est l'espace de Hilbert usuel ℓ^2 des suites réelles de carré sommable.

iii) Montrer que la sphère unité dans ℓ^2 n'est pas totalement bornée bien qu'elle soit bornée. (On admet que *dans un espace métrique complet toute partie fermée totalement bornée est compacte*).

Dans ℓ^2 on note Π le *parallélipipède de Hilbert i.e.* l'ensemble des suites de réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ telles que

$$|x_1| \leq 1, \;\; |x_2| \leq \frac{1}{2} \;\; \cdots \;\; |x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \;\; \cdots$$

iv) Montrer que Π est compact. (Pour $\varepsilon > 0$, considérer n tel que $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ ensuite projeter $x = (x_1, x_2, \ldots,)$ sur le sous-espace E_n engendré par les n premiers vecteurs de la base orthonormale canonique et évaluer la distance de x à sa projection.)

6.4. Soit $\rho : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable, bornée et strictement positive en dehors d'un ensemble de mesure nulle. On note E_ρ l'espace des classes de fonctions complexes mesurables de carré intégrable sur $[-1, +1]$ pour la mesure $\mu = \rho\lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $[-1, +1]$.

i) Montrer que si $\rho' \leq \rho$ alors $E_\rho \subset E_{\rho'}$. Donner un exemple où cette inclusion est stricte.

On suppose $\rho = 1$ identiquement.

ii) Montrer que le sous-espace $C^0([-1, +1], \mathbb{C})$ des fonctions continues sur $[-1, +1]$ n'est pas fermé dans E_1.

6.5. Soit E un espace de Hilbert.

i) Montrer que si M est un sous-espace fermé alors $(M^\perp)^\perp = M$.

ii) Ceci reste-t-il encore vrai si M n'est pas fermé ?

6.6. On note E l'espace des suites réelles $(x_k)_{k\geq 1}$ telles que $\sum_k x_k^2 < +\infty$ et $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ une suite dans $]0, 1]$. On définit un produit scalaire sur E en posant

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k x_k y_k$$

i) Montrer qu'en général E muni de ce produit scalaire n'est pas un espace de Hilbert (*i.e.* n'est pas complet).

ii) On suppose $\lambda_k = 1$ pour tout k. Soit $M = \{x \in E : \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver un sous-espace N de E tel que $E = M \oplus N$.

6.7. Dans l'espace $L^2(]-1, +1[)$ on considère le triangle Δ dont les sommets sont les fonctions $f(x) = 0$, $g(x) = 1$ et $h(x) = x$. Calculer les angles de Δ.

6.8. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert, V un sous-espace de dimension 1 et $V^\perp$ son orthogonal. Soit $a \in V$ non nul. Montrer que la distance $d(x, V^\perp)$ de tout $x \in E$ à $V^\perp$ est donnée par $d(x, V^\perp) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}$.

6.9. On note $E = L^2([0, 1])$ l'espace de Hilbert des classes de fonctions réelles de carré intégrable.

i) Montrer que $V = \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ est un hyperplan fermé de E. Quel est son orthogonal ?

ii) Calculer la distance de la fonction $f(x) = x^2$ au sous-espace V.

6.10. Quelle est dans ℓ^2 la distance $d_n = d(x, V_n)$ de $x = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ au sous-espace vectoriel $V_n = \{y \in \ell^2 : \sum_{k=1}^n y_k = 0\}$? Calculer $\lim_{n\to+\infty} d_n$.

6.11. Soit X un espace métrique. On appelle G_δ toute partie de X qui est intersection dénombrable d'ouverts de X. On aura besoin d'une autre version du théorème de Baire qui est la suivante : *supposons X complet et soit $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts chacun dense dans X. Alors leur intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{O}_n$ est dense dans X.*

Soient $(X, || \ ||)$ un espace de Banach et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de formes linéaires continues sur X. Pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$f(x) = \sup_{i\in I}|f_i(x)| \text{ et } \mathcal{O}_n = \{x \in X \ : \ f(x) > n\}.$$

i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{O}_n$ est ouvert dans X.

Deux possibilités pour les ouverts $\mathcal{O}_n$: l'un d'eux au moins n'est pas dense ou bien ils sont tous denses.

<u>Premier cas</u> : il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{O}_N$ ne soit pas dense dans X.

ii) Montrer qu'il existe $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $u \in X$ avec $||u|| \leq \varepsilon$

$$|f(x_0 + u)| \leq N.$$

iii) En remarquant que $u = (x_0 + u) - x_0$, montrer que $\sup_{i\in I} |||f_i||| \leq \frac{2N}{\varepsilon}$.

<u>Deuxième cas</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{O}_n$ est dense dans X.

iv) Montrer qu'il existe un G_δ, qu'on notera $\mathcal{O}$, dense dans X et tel que pour tout $x \in \mathcal{O}$ on ait $f(x) = +\infty$.

On a donc établi le théorème suivant : *soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de formes linéaires continues sur un espace de Banach X. Alors une au moins et une seulement des conditions qui suivent est satisfaite.*

(1) *Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $i \in I$, $|||f_i||| < M$,*

(2) *il existe un G_δ dense $\mathcal{O}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{O}$, $|f(x)| = +\infty$.*

On suppose maintenant que X est l'espace des fonctions complexes continues périodiques de période 2π sur $\mathbb{R}$. On munit X des normes suivantes

$$||x||_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}|x(t)| \text{ et pour tout } p \geq 1 \ ||x||_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La norme $|| \ ||_\infty$ fait de X un espace de Banach. Le complété de X pour $|| \ ||_p$ est l'espace $L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des classes d'équivalence (pour la relation d'égalité λ-presque partout, λ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) des fonctions complexes mesurables périodiques de période 2π et dont la restriction à l'intervalle $[-\pi, +\pi]$ est de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable. Toute fonction $x \in X$ est la limite pour la norme $|| \ ||_2$ de la somme partielle (de la série de Fourier de x) :

$$S_n(x, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)P_n(\theta - t)dt \quad n \in \mathbb{N}^*$$

où $P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $f_n(x) = S_n(x, \theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in X$.

v) Montrer que f_n est une forme linéaire continue sur X de norme $|||f_n|||$ inférieure ou égale à $||P_n||_1$.

vi) Etablir l'égalité $P_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}$.

vii) Montrer que $||P_n||_1$ tend vers l'infini quand $n \to +\infty$. (Ecrire la définition de $||P_n||_1$ et minorer en utilisant l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.)

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_n(\theta - t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } P_n(\theta - t) < 0 \end{cases}$$

et on considère une suite (x_j) dans X qui converge simplement vers g (dont on admet l'existence).

viii) Montrer que $\lim_{j \to +\infty} |f_n(x_j)| = ||P_n||_1$. (Appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions continues $\varphi_j(t) = x_j(t)P_n(\theta - t)$ convergeant vers $g(t)P_n(\theta - t)$.)

ix) Montrer qu'il existe une partie $\mathcal{O}$ de X qui est un G_δ dense dans X et telle que pour tout $x \in \mathcal{O}$ on ait $\lim_{n \to +\infty} |S_n(x, \theta)| = +\infty$ *i.e.* la série de Fourier de la fonction x ne converge pas vers x au point θ.

6.12. Soit E l'espace vectoriel des classes de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, périodiques de période 2π et dont la restriction à l'intervalle $[0, 2\pi]$ est de carré intégrable. On munit E du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ et de la norme $||\quad||$ associée ; E est un espace de Hilbert dont lequel le sous-espace E_0 constitué des éléments continus est dense pour $||\quad||$. On rappelle que la famille $e_n = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ est une base hilbertienne de E et que pour tout élément $f \in E$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier $c_n(f)$ est donné par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

i) Montrer que l'application $c_n : f \in E \longmapsto c_n(f) \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue de norme 1.

ii) Montrer que $c_n(f)$ tend vers 0 quand $|n|$ tend vers $+\infty$.

On désigne par $L^\infty(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel des familles bornées de nombres complexes $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ muni de la norme $||x||_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$ et par $\mathcal{C}_0$ le sous-espace de $L^\infty(\mathbb{Z})$ formé des éléments $x = (x_n)$ tels que $\lim_{|n| \to \infty} x_n = 0$.

iii) Montrer que $L^\infty(\mathbb{Z})$ est complet.

iv) Montrer que $\mathcal{C}_0$ est fermé dans $L^\infty(\mathbb{Z})$.

v) Montrer que l'application $\Psi : f \in E \longrightarrow (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{C}_0$ est continue.

vi) En utilisant la base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, montrer que Ψ est injective.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $f_k(x) = \sum_{s=-k}^{k} e^{isx} = \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

vii) Montrer que $\lim_{k \to \infty} ||f_k|| = +\infty$ mais que $\lim_{k \to \infty} ||\Psi(f_k)||_\infty = 1$.

viii) En déduire que l'application $\Psi : E \longrightarrow \mathcal{C}_0$ n'est pas ouverte et donc Ψ n'est pas surjective.

CHAPITRE IX
Opérateurs bornés

Beaucoup de questions en sciences exactes ou appliquées amènent à des problèmes de résolution d'équations différentielles ou intégrales. Résoudre ces équations revient la plupart du temps à "inverser" des applications définies sur un espace fonctionnel adéquat. Lorsque ces équations sont linéaires, les applications associées sont bien sûr linéaires. On les appelle *opérateurs.* L'objet de ce chapitre est d'étudier les *opérateurs bornés.* Nous définirons le spectre et décrirons ses propriétés ; nous ferons cela de façon plus détaillée pour les opérateurs compacts qui occuperont beaucoup de place. Cette étude sera faite sur des espaces normés quelconques ; certains théorèmes ne seront vrais, bien entendu, que sur les espaces de Banach ; nous préciserons cette hypothèse à chaque fois.

1. Définitions et premières propriétés

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace normé sur le corps $\mathbb{K}$ (qui sera toujours soit le corps des réels soit le corps des complexes).

1.1. Définition. *On appelle* **opérateur borné** *ou simplement opérateur sur E toute application linéaire continue $T : E \longrightarrow E$.*

On peut bien sûr définir un *opérateur borné* de E dans F (espace normé différent de E) comme étant une application linéaire continue $E \longrightarrow F$. Mais on se limitera au cas $E = F$. Il est clair que l'ensemble $L(E)$ des opérateurs sur E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$; la norme est définie par

$$|||T||| = \sup_{||x|| \leq 1} ||T(x)||.$$

En plus il est muni de la composition naturelle des applications qui en fait une algèbre et qui vérifie $|||ST||| \leq |||S|||.|||T|||$. Cette algèbre a une unité qui est l'opérateur identité I de E.

Un élément $T \in L(E)$ est dit *inversible à gauche* s'il existe un élément $S \in L(E)$ tel que $ST = I$, *inversible à droite* s'il existe $S \in L(E)$ tel que $TS = I$, *inversible* s'il est inversible à gauche et à droite et si les deux inverses coïncident. Dans ce cas l'inverse de T sera noté T^{-1}. On note $GL(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de E ; c'est un groupe pour la multiplication des opérateurs.

1.2. Théorème. *Si E est complet, le groupe $GL(E)$ est ouvert dans $L(E)$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout $T \in GL(E)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(T, \varepsilon)$ de $L(E)$ soit contenue dans $GL(E)$.

i) Montrons d'abord que tout opérateur suffisamment voisin de I est inversible. Si $|||T||| < 1$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|||T^n||| \leq |||T|||^n < 1$; comme E est complet, $L(E)$ l'est aussi ; la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T^n = I + T + T^2 + \dots$$

converge donc dans $L(E)$; elle a pour limite l'inverse de l'opérateur $S = I - T$.

ii) Soient $T \in GL(E)$ et $X \in L(E)$ tel que $|||X - T||| < \frac{1}{|||T^{-1}|||}$. Alors

$$\begin{aligned} |||T^{-1}X - I||| &= |||T^{-1}(X - T)||| \\ &\leq |||T^{-1}|||.|||X - T||| \\ &< |||T^{-1}|||\frac{1}{|||T^{-1}|||}. \\ &< 1 \end{aligned}$$

D'après i) l'opérateur $T^{-1}X = I - (I - T^{-1}X)$ est inversible ; par suite X est inversible. L'ensemble $GL(E)$ est donc ouvert. □

Nous voyons que la complétude de l'espace E est essentielle. Elle le sera aussi pour d'autres propriétés ; par exemple on a le

1.3. Théorème. *Supposons E complet et soit T un opérateur borné sur E. Alors*

i) T est inversible à gauche

implique

ii) il existe une constante réelle $m > 0$ telle que pour tout $x \in E$

$$\|Tx\| \geq m\|x\| \tag{IX.1}$$

qui implique à son tour

iii) T est injectif.

Si en plus on a l'hypothèse :

(H) : Im(T) admet un supplémentaire topologique

alors ces trois assertions sont équivalentes.

Démonstration. Elle se fera suivant le schéma i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) de manière générale et iii)$\Longrightarrow$i) en plus si l'hypothèse (H) est satisfaite.

i)$\Longrightarrow$ii)

Soit S inverse à gauche de T. Alors $ST = I$ *i.e.* pour tout $x \in E$ on a $x = (ST)x$. Comme S est borné on aura $\|x\| = \|(ST)x\| \leq |||S|||.\|Tx\|$. Il suffit de prendre alors $m = \frac{1}{|||S|||}$.

ii)$\Longrightarrow$iii)

Si T vérifie $\|Tx\| \geq m\|x\|$ pour $m > 0$ alors $Tx = 0$ implique $x = 0$ *i.e.* T est injectif.

Supposons maintenant l'hypothèse (H) remplie et démontrons iii)$\Longrightarrow$i). Si T est injectif, T est un isomorphisme (algébrique) continu de E sur Im(T). Comme Im(T) admet un supplémentaire topologique, il est fermé dans E ; c'est donc un espace de Banach. Il en résulte que $T : E \longrightarrow$ Im(T) est un isomorphisme topologique. La restriction T_0 de T à Im(T) admet donc un inverse T_0^{-1}. Soit P la première projection qui est continue $E = \text{Im}(T) \oplus V \longrightarrow \text{Im}(T)$. Il est facile de voir alors que $S = T_0^{-1}P$ vérifie $ST = I$. □

1.4. Exemples

i) Nous commencerons par donner les plus simples : les opérateurs sur les espaces de dimension finie. Toute application linéaire $T : E = \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est un opérateur borné. Un tel opérateur est complètement déterminé par sa matrice $A = (a_{ij})$ relativement à une base fixée $(e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ on a

$$Tx = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

ii) Soient E un espace préhilbertien et V un sous-espace complet. Alors la projection orthogonale $P : E \longrightarrow V$ définit un opérateur sur E de norme égale à 1.

iii) Soit $E = C^0([a,b], \mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes continues sur $[a,b]$ muni de la norme de la convergence uniforme $||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Pour toute fonction $f \in E$ on pose $T_\varphi(f)(x) = \varphi(x)f(x)$ où $\varphi \in E$ est une fonction fixée. Alors l'application T_φ ainsi définie est un opérateur sur E. En effet la linéarité est immédiate. D'autre part on a

$$||T_\varphi(f)||_\infty = ||\varphi f||_\infty \leq ||\varphi||_\infty.||f||_\infty.$$

Ce qui montre bien que T_φ est un opérateur borné sur E.

Posons maintenant $T(f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$ où $K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue. Alors T est linéaire et vérifie

$$\begin{aligned} ||T(f)||_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b K(x,y)f(y)dy \right| \\ &\leq \int_a^b \sup_{x,y\in[a,b]} |K(x,y)| \sup_{y\in[a,b]} |f(y)|dy \\ &\leq (b-a)||K||_\infty ||f||_\infty \end{aligned}$$

Donc T est un opérateur sur E.

Soit g un homéomorphisme de $[a,b]$ et posons $T_g(f) = f \circ g$. Alors $T_g : E \longrightarrow E$ est une application linéaire qui vérifie $||T_g(f)||_\infty = ||f||_\infty$ *i.e.* T_g est un opérateur sur E.

iv) Sur l'espace ℓ^2 des suites réelles de carré sommable on considère l'application

$$T(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right).$$

Il est clair que T est un opérateur sur ℓ^2 de norme 1.

1.5. Définition. *Soit maintenant T un opérateur sur l'espace normé E. On appelle* **adjoint** *de T la transposée $T' : E' \longrightarrow E'$ de T définie, pour tout $x \in E$ et tout $y' \in E'$, par $T^*(y')(x) = y'(Tx)$.*

L'adjoint sera noté T^*. C'est un opérateur borné sur E' de même norme que T.

2. Spectre d'un opérateur

Soit T une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans lui-même. Si on fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, alors la connaissance de T se ramène à celle de sa matrice A relativement à $\mathcal{B}$. Il est bien connu que, si on change la base, la matrice A change (bien que l'application T reste la même) ; il est donc naturel de se demander s'il existe une base de E dans laquelle cette matrice s'écrit de la façon la plus simple possible par exemple diagonale. Sur chacun des vecteurs de cette base, T agit par une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$. Un tel nombre λ est appelé *valeur propre* de T. Ceci amène de manière naturelle à se poser le même problème pour un opérateur sur un espace normé de dimension infinie ; mais dans cette situation la notion de "valeur propre" n'est pas suffisante et, en général, diffère totalement du cas de la dimension finie. C'est ce que nous nous proposons d'exposer de façon assez sommaire dans ce paragraphe ; la théorie spectrale (*i.e.* l'étude du spectre) est assez riche pour une classe d'opérateurs que nous étudierons au paragraphe 3 et de manière encore plus précise sur les espaces de Hilbert au chapitre X.

Soient E un espace normé sur le corps $\mathbb{K}$.

2.1. Définition. *Soit T un opérateur sur E. On appelle* **valeur spectrale** *de l'opérateur T tout nombre complexe λ tel que l'opérateur $T-\lambda I$ ne soit pas inversible dans $L(E)$. On dira que λ est valeur propre de T si $T - \lambda I$ n'est pas injectif.*

Evidemment toute valeur propre est valeur spectrale. L'ensemble des valeurs spectrales de T est appelé *spectre* de T et sera noté $\sigma(T)$; les valeurs propres en constituent une partie appelée *spectre ponctuel* de T ; le complémentaire dans $\sigma(T)$ du spectre ponctuel est appelé *spectre continu.* Tout nombre dans $\mathbb{C} - \sigma(T)$ est appelé *valeur régulière* de T. Il est évident que λ est valeur régulière de T si, et seulement si, l'opérateur

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}, \tag{IX.2}$$

appelé *résolvante* de T, existe et est borné. L'inclusion du spectre ponctuel dans $\sigma(T)$ est en général stricte.

2.2. Théorème. *Soit T un opérateur non nul sur E qu'on supposera complet. Alors le spectre $\sigma(T)$ de T est un ensemble fermé de $\mathbb{C}$ contenu dans le disque fermé $D(0, |||T|||)$.*

Démonstration. Montrons que l'ensemble $\mathbb{C} - \sigma(T)$ des valeurs régulières de T est ouvert. Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \sigma(T)$; alors l'opérateur $T - \lambda I$ est inversible dans $L(E)$ ou en d'autres termes $T - \lambda I \in GL(E)$. Mais $GL(E)$ est ouvert ; il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\mu \in D(0, \varepsilon)$ l'opérateur $T - (\lambda + \mu)I \in GL(E)$. L'ensemble $\sigma(T)$ est donc fermé.

Montrons que toute valeur à l'extérieur du disque $D(0, |||T|||)$ est régulière ; ce qui établira que $\sigma(T) \subset D(0, |||T|||)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > |||T|||$. On a

$$T - \lambda I = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right)$$

Comme $\frac{|||T|||}{|\lambda|} < 1$ et que E est complet la série

(IX.3) $$-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^n}$$

converge dans $L(E)$ et a pour limite l'opérateur $(T-\lambda I)^{-1}$. □

En fait on peut préciser le résultat de la manière suivante : soit T un opérateur sur E. On appelle *rayon spectral* de T le nombre réel positif

(IX.4) $$\rho(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|.$$

Il est clair qu'on a $\rho(T) \leq |||T|||$ et cette inégalité peut être stricte comme on va le voir sur un exemple. Le théorème qui suit et dont on trouvera une démonstration dans [Ru] (dans le cadre des algèbres de Banach qui généralisent $L(E)$) donne une formule de calcul du rayon spectral.

2.3. Théorème (formule du rayon spectral). *Soit T un opérateur sur E complet. Alors la suite $|||T^n|||^{\frac{1}{n}}$ converge et*

(IX.5) $$\rho(T) = \lim_{n\to+\infty} |||T^n|||^{\frac{1}{n}}.$$

Nous allons donner un théorème assez important sur le spectre et la résolvante comme fonction des valeurs régulières pour un opérateur borné sur un espace de Banach.

2.4. Théorème. *Soient E un espace de Banach complexe non réduit à $\{0\}$ et T un opérateur sur E.*

i) Pour tout $x \in E$ et toute forme linéaire continue x' sur E, l'application qui à $\lambda \in \mathbb{C}-\sigma(T)$ associe $\varphi(\lambda) = \langle R_\lambda(x), x'\rangle \in \mathbb{C}$ (où R_λ est la résolvante de T) est une fonction holomorphe qui tend vers 0 quand $|\lambda|$ tend vers l'infini.

ii) Le spectre $\sigma(T)$ de T est non vide.

Démonstration. i) Nous allons d'abord montrer que l'application

$$\lambda \in \mathbb{C}-\sigma(T) \longmapsto R_\lambda \in L(E)$$

est continue. Soient $\lambda \in \mathbb{C}-\sigma(T)$ et $h \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} T-(\lambda+h)I &= ((T-\lambda I)-hI) \\ &= (T-\lambda I)\left(I-h(T-\lambda I)^{-1}\right) \end{aligned}$$

Pour h suffisamment petit, l'opérateur $T-(\lambda+h)I$ est inversible d'inverse

$$R_{\lambda+h} = \left((T-\lambda I)(I-h(T-\lambda I)^{-1}\right)^{-1} = (I-hR_\lambda)^{-1}\cdot R_\lambda.$$

On voit donc que $\lim_{h\to 0} R_{\lambda+h} = \lim_{h\to 0} (I - hR_\lambda)^{-1} \cdot R_\lambda = R_\lambda$. Soient λ et μ deux valeurs distinctes dans $\mathbb{C} - \sigma(T)$ mais μ suffisamment proche de λ. Alors un calcul facile montre que

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda \cdot R_\mu.$$

D'où

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} = \lim_{\mu\to\lambda} \frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda - \mu} = -R_\lambda^2.$$

Soient maintenant $x \in E$ et $x' \in E'$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{d\lambda} &= \lim_{\mu\to\lambda} \frac{\varphi(\mu) - \varphi(\lambda)}{\mu - \lambda} \\
&= \lim_{\mu\to\lambda} \left\langle \frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda}, x' \right\rangle \\
&= -\langle R_\lambda^2, x' \rangle
\end{aligned}$$

qui montre bien que φ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \sigma(T)$. De (IX.3) on déduit que R_λ tend vers 0 quand $|\lambda|$ tend l'infini ; par suite $\varphi(\lambda)$ tend vers 0 quand $|\lambda|$ tend vers l'infini.

ii) Supposons que le spectre est vide. Alors la fonction φ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Comme elle tend vers 0 à l'infini, elle est constante égale à 0 d'après le théorème de Liouville (*cf.* [Ca]). Cela implique $\langle R_\lambda(x), x' \rangle = 0$ pour toute forme linéaire $x' \in E'$; donc $R_\lambda(x) = 0$ d'après le théorème de Hahn-Banach. Ce qui n'est pas possible. □

Regardons un exemple d'utilisation de la formule du rayon spectral ; elle nous permettra aussi d'avoir, dans certaines situations particulières, le spectre de l'opérateur.

2.5. Exemple

Soient $E = C^0([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur l'intervalle $[0,1]$ muni de la norme $|| \; ||_\infty$ de la convergence uniforme et $T \in L(E)$ défini par $T(f)(x) = \int_0^x K(x,y) f(y) dy$ où K est une fonction continue sur le triangle Δ de $\mathbb{R}^2$ de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. On notera M le maximum de la fonction $|K|$ sur Δ. Soit $f \in E$. On a

$$\begin{aligned}
|T(f)(x)| &= \left| \int_0^x K(x,y) f(y) dy \right| \\
&\leq \int_0^x \sup_{x,y\in[0,1]} |K(x,y)| \sup_{y\in[0,1]} |f(y)| dy \\
&\leq Mx ||f||_\infty.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}|T^2(f)(x)| &= \left|\int_0^x K(x,y)T(f)(y)dy\right| \\ &\leq \int_0^x \sup_{x,y\in[0,1]} |K(x,y)| \sup_{y\in[0,1]} |T(f)(y)|dy \\ &\leq \int_0^x M^2 y||f||_\infty dy \\ &\leq M^2\frac{x^2}{2}||f||_\infty.\end{aligned}$$

De proche en proche on démontre que $|T^n(f)(x)| \leq M^n \frac{x^n}{n!}||f||_\infty$ pour tout $n \geq 0$. Donc $||T^n(f)|| \leq \frac{M^n}{n!}||f||_\infty$. En prenant le sup pour $||f||_\infty \leq 1$ on obtient $|||T^n||| \leq \frac{M^n}{n!}$ et donc

$$|||T^n|||^{\frac{1}{n}} \leq \frac{M}{(n!)^{\frac{1}{n}}}.$$

D'après la formule de Stirling qui donne l'estimation de $n!$ pour n grand

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left\{1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

(où e est la base du logarithme néperien et $0\left(\frac{1}{n}\right)$ une quantité qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$) $(n!)^{\frac{1}{n}}$ tend vers $+\infty$. D'où $\rho(T) = \lim_{n\to+\infty} |||T^n|||^{\frac{1}{n}} = 0$. On en déduit qu'il n'y a aucune valeur spectrale non nulle. Comme le spectre n'est jamais vide, il est forcément réduit à $\{0\}$. On peut aussi voir autrement que 0 est une valeur spectrale non propre : toute fonction $h \in E$ dans l'image de T doit vérifier $h(0) = 0$ donc T ne peut pas être surjectif et par suite il n'est pas inversible ; on peut voir aussi qu'il est injectif. □

3. Opérateurs compacts

Dans tout ce paragraphe $(E, || \ ||)$ sera un espace normé sur le corps $\mathbb{K}$ (qui est toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

3.1. Définition. *On dira qu'un opérateur T sur E est* **compact**, *si l'image $T(B)$ de la boule unité B de E est relativement compacte.*

Cela implique en fait que l'image par T de toute partie bornée de E est relativement compacte. De façon générale, une application linéaire $T : E \longrightarrow F$ (E et F étant des espaces normés) est dite *compacte*, si elle transforme toute partie bornée de E en partie relativement compacte de F.

D'après le théorème de Riesz l'opérateur identité I n'est compact que si l'espace E est de dimension finie.

Il est clair que si $T \in L(E)$ est compact, λT est compact pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. D'autre part si T et S sont compacts, $T + S$ est compact. En effet soient B la boule unité (fermée) de E et (z_n), $z_n = T(x_n) + S(x_n)$ une suite dans $T(B) + S(B)$; alors de $(T(x_n))$ on peut extraire une suite convergente $(T(x'_n))$ et de (x'_n) on peut extraire une suite $(x_{n_k})_k$ telle que la suite $(S(x_{n_k}))_k$ converge. Il est alors évident

que $(T(x_{n_k}) + S(x_{n_k})_k$ est une sous-suite convergente de (z_n) ; l'opérateur $T + S$ est donc compact.

Soient $T \in L(E)$ compact et C et D deux opérateurs bornés sur E ; il est immédiat de voir que CTD est un opérateur compact sur E.

On résume tout cela dans la proposition qui suit.

3.2. Proposition. *L'ensemble $\mathcal{K}(E)$ des opérateurs compacts sur E est un idéal bilatère de l'algèbre $L(E)$ des opérateurs bornés sur E.*

De cette proposition on déduit en particulier que si $\dim E = +\infty$ et $T \in GL(E)$ alors T^{-1} ne peut pas être compact ; en effet s'il l'était I serait compact ; ce qui ne peut se produire que si $\dim E < +\infty$.

On peut remarquer que si $T \in \mathcal{K}(E)$ et si V est un sous-espace fermé de E stable par T, alors la restriction de T à V est un opérateur compact. En effet la boule unité de V est la trace sur V de la boule unité B de E ; donc $T(V \bigcap B)$ est contenu dans V et est relativement compact dans V.

3.3. Proposition. *Soient $T \in \mathcal{K}(E)$ et $\widehat{T}$ le prolongement canonique de T au complété $\widehat{E}$ de E. Alors $\widehat{T} \in \mathcal{K}(\widehat{E})$ et $\widehat{T}(\widehat{E}) \subset E$.*

Démonstration. Soient B la boule unité fermée de E et $\widehat{B}$ celle de $\widehat{E}$. Alors $\widehat{B}$ est l'adhérence de B dans $\widehat{E}$. D'où $\overline{\widehat{T}(\widehat{B})} = \overline{T(B)}$; comme $\overline{T(B)}$ est un compact de E, il est fermé dans E (adhérences prises dans $\widehat{E}$) ; par suite $\overline{\widehat{T}(\widehat{B})} \subset E$ et a fortiori $\widehat{T}(\widehat{B}) \subset E$. Comme $\widehat{T}(\widehat{B})$ engendre $\widehat{T}(\widehat{E})$ on a $\widehat{T}(\widehat{E}) \subset E$. Ce qui démontre la proposition. □

3.4. Proposition. *Supposons E séparable. Si $T \in L(E)$ est compact alors son adjoint T^* est un opérateur compact de E'.*

Démonstration. Soient B et B' les boules unités fermées respectivement de E et E'. On sait que B' est un ensemble équicontinu de $E' = L(E, \mathbb{K})$, donc une suite (y'_n) dans B' converge vers $y' \in B'$ uniformément sur tout compact de E si, et seulement si, (y'_n) converge faiblement (*i.e.* simplement) vers y'. Soit (y'_n) une suite dans B'. Comme B' est faiblement compacte on peut extraire de (y'_n) une sous-suite $(y'_{n_k})_k$ qui converge simplement vers un élément $y' \in B'$ donc $(y'_{n_k})_k$ converge vers y' uniformément sur tout compact de E ; en particulier la suite $(y'_{n_k})_k$ converge vers y' uniformément sur le compact $\overline{T(B)}$. Cela signifie que $\langle Tx, y'_{n_k}\rangle$ converge uniformément par rapport à $x \in B$. Mais comme $\langle Tx, y'_{nk}\rangle = \langle x, T^* y'_{n_k}\rangle$ la suite $(T^* y'_{n_k})_k$ converge uniformément sur B vers $T^* y'$ donc $(T^* y'_{n_k})_k$ converge en norme vers $T^* y'$ puisque dans un espace normé la convergence en norme est exactement la convergence uniforme sur la boule unité. □

3.5. Théorème. *Supposons E complet. Alors l'idéal $\mathcal{K}(E)$ est fermé dans $L(E)$ pour la topologie de la norme.*

Démonstration. Soient (T_k) une suite dans $\mathcal{K}(E)$ convergeant vers $T \in L(E)$ et x_n une suite dans la boule unité de E. Comme T_1 est compact de la suite $(T_1 x_n)$ on peut extraire une sous-suite convergente $T_1(x_1^1), T_1(x_2^1), \ldots, T_1(x_n^1)$,... Comme T_2 est compact, de la suite $(T_2(x_n^1))$ on peut extraire une sous-suite convergente $T_2(x_1^2), T_2(x_2^2), \ldots, T_2(x_n^2)$,... En itérant ce processus on construit pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

une suite $x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p, \ldots$ extraite de la suite $x_1^{p-1}, x_2^{p-1}, \ldots, x_n^{p-1}, \ldots$ telle que la suite

$$T_p(x_1^p), T_p(x_2^p), \ldots, T_p(x_n^p), \ldots$$

soit convergente. Soit $x_1^1, x_2^2, \ldots, x_n^n, \ldots$ la suite diagonale. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la suite $T_k(x_1^1), T_k(x_2^2), \ldots, T_k(x_n^n), \ldots$ est convergente. Pour montrer que T est compact il suffit de montrer que la suite $(T(x_n^n))$ est convergente ; comme E est complet il suffit en fait de montrer que cette suite est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$; alors (utilisant le fait que (T_k) converge vers T et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la suite $(T_k(x_n^n))$ converge) il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $m, n, k \geq N$ on ait

$$||T(x_n^n) - T_k(x_n^n)|| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$
$$||T_k(x_n^n) - T_k(x_m^m)|| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$
$$||T_k(x_m^m) - T(x_m^m)|| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Comme

$$||T(x_n^n) - T(x_m^m)|| \leq ||T(x_n^n) - T_k(x_n^n)|| + ||T_k(x_n^n) - T_k(x_m^m)|| + ||T_k(x_m^m) - T(x_m^m)||$$

on en déduit que pour $m, n \geq N$ on a $||T(x_n^n) - T(x_m^m)|| \leq \varepsilon$. Ce qui montre bien que la suite $(T(x_n^n))$ est de Cauchy. □

3.6. Exemples d'opérateurs compacts

i) Tout opérateur sur un espace normé de dimension finie est compact. De manière générale, si E est un espace normé et T un opérateur sur E dont l'image est de dimension finie alors T est compact. Un tel opérateur est dit de *rang fini.* L'ensemble $\mathcal{RF}(E)$ des opérateurs de rang fini sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}(E)$; nous verrons dans le chapitre qui suit que si E est de Hilbert alors $\mathcal{RF}(E)$ est dense dans $\mathcal{K}(E)$.

ii) Soient E l'espace des fonctions complexes continues sur $[0,1]$ muni de la norme $|| \ ||_\infty$ et $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour toute fonction f dans E on pose

(IX.6) $$T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy.$$

On dira que T est un *opérateur intégral de noyau K.* La fonction K joue le rôle d'une matrice dont les indices sont x et y variant dans $[0,1]$. Montrons que T est compact. Soit B la boule unité fermée de E. L'ensemble $T(B)$ est équicontinu. En effet soit $\varepsilon > 0$; comme K est définie continue sur un ensemble compact, elle est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tous $x, x', y \in [0,1]$ on ait

$$|x - x'| \leq \eta \Longrightarrow |K(x,y) - K(x',y)| \leq \varepsilon$$

et par suite pour toute fonction f

$$(IX.7) \qquad |T(f)(x) - T(f)(x')| = \left| \int_0^1 \Big(K(x,y) - K(x',y)\Big) f(y)dy \right| \leq \varepsilon ||f||_\infty$$

L'ensemble $T(B)$ est donc équicontinu car η ne dépend pas de $f \in B$; comme il est borné car l'opérateur T est borné il est relativement compact d'après le théorème d'Ascoli. Donc T est compact.

iii) Soit E l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, a]$ (avec $a > 0$) muni de la norme

$$||f||_p = \left(\int_0^a |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$ on retrouve l'espace de l'exemple ii). Pour distinguer les différents espaces normés $(E, || \ ||_p)$ on les notera E_p (c'est l'espace E muni de la norme $|| \ ||_p$). Soit $f \in E$. L'inégalité de Hölder appliquée aux fonctions f et 1 donne pour $p \in [1, +\infty[$

$$(IX.8) \qquad ||f||_1 \leq a^{1-\frac{1}{p}} ||f||_p.$$

D'autre part un calcul immédiat nous fournit l'inégalité

$$(IX.9) \qquad ||f||_p \leq a^{\frac{1}{p}} ||f||_\infty.$$

Il résulte de (IX.8) et (IX.9) que, pour tout $p > 1$, la topologie de E_p est plus fine que celle de E_1 et moins fine que celle de E_∞.

Considérons l'opérateur T sur E défini par la relation (IX.6). Soit M le maximum de la fonction K ; alors on vérifie facilement que, pour toute fonction $f \in E$, $||T(f)||_\infty \leq M||f||_1$. Donc l'application linéaire $T : E_1 \longrightarrow E_\infty$ est continue et par suite pour tout $p \in [1, +\infty]$, T est un opérateur borné sur E_p. On montre aussi une inégalité analogue à celle donnée par (IX.7) pour la norme $|| \ ||_1$ *i.e.* pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, x', y \in [0, 1]$ et toute fonction $f \in E$ on ait

$$(IX.10) \qquad |T(f)(x) - T(f)(x')| = \left| \int_0^1 \Big(K(x,y) - K(x',y)\Big) f(y)dy \right| \leq \varepsilon ||f||_1.$$

Ceci montre que l'image par T de la boule unité B_1 de E_1 est équicontinue ; d'autre part, comme l'application linéaire $T : E_1 \longrightarrow E_\infty$ est continue, $T(B_1)$ est borné dans E_∞. D'après le théorème d'Ascoli, $T(B_1)$ est relativement compact dans E_∞, donc dans tout E_p. En conclusion T opérant sur n'importe lequel des espaces normés E_p est compact. □

4. Spectre d'un opérateur compact

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace normé. Nous allons commencer par établir quelques résultats préliminaires permettant dans un premier temps de donner un théorème de décompostion pour les opérateurs qui sont du type "I – compact" et dans un deuxième temps la structure du spectre d'un opérateur compact. Fixons un nombre δ dans l'intervalle $]0, 1[$. On notera dans toute la suite B la boule unité fermée de l'espace E.

4.1. Lemme. *Soient V et W deux sous-espaces fermés de E tels que V soit strictement contenu dans W et $T \in L(E)$ vérifiant $T(W) \subset V$. Posons $S = I - T$. Alors il existe $x \in W \bigcap B$ tel que $d(Sx, S(V)) \geq \delta$.*

Démonstration. i) Comme V et W sont fermés, V est un sous-espace fermé de W. L'espace quotient W/V est donc normé ; soit X un vecteur de W/V tel que $\delta \leq ||X|| < 1$. Comme

$$||X|| = \inf_{x \in X} ||x||$$

dans la classe X on peut trouver un vecteur $x \in W \bigcap B$ tel que $d(x, V) \geq \delta$.

ii) Par hypothèse on a $T(W) \subset V$; donc pour tout $y \in V$ le vecteur $y + Tx - Ty \in V$ (x étant le vecteur donné par i)). Donc

$$||Sx - Sy|| = ||x - (y + Tx - Ty)|| \geq \delta$$

pour tout $y \in V$. Par suite $d(Sx, S(V)) \geq \delta$. □

4.2. Proposition. *Soit T est un opérateur compact sur E et posons $S = I - T$. Alors toute suite croissante (resp. décroissante) V_n de sous-espaces vectoriels fermés de E telle que $S(V_n) \subset V_{n-1}$ (resp. $S(V_n) \subset V_{n+1}$) est stationnaire.*

Démonstration. Supposons la suite (V_n) non stationnaire ; quitte à en extraire une sous-suite on peut la supposer strictement croissante. D'après le lemme IX. 4.1 appliqué à l'opérateur $T = I - S$ dans chaque sous-espace V_n on peut trouver un vecteur x_n tel que $||x_n|| \leq 1$ et $d(T(x_n), T(V_{n-1})) \geq \delta$. On a donc une suite (x_n) dans B qui vérifie $d(T(x_n), T(x_{n-1})) \geq \delta$ donc $d(T(x_n), T(x_p)) \geq \delta$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$; la suite $(T(x_n))$ ne saurait donc être relativement compacte. Ce qui contredit la compacité de l'opérateur T.

Une démonstration analogue établirait l'assertion pour (V_n) décroissante. □

Ceci va nous permettre de démontrer le théorème qui suit. Rappellons qu'on appelle *conoyau* d'une application linéaire $S : E \longrightarrow F$ l'espace vectoriel quotient $F/\mathrm{Im}S$. La dimension de cet espace est par définition la *codimension* de $\mathrm{Im}S$.

4.3. Théorème *Soient $T \in \mathcal{K}(E)$ et $S = I - T$. Alors*

i) $\mathrm{Ker}S$ *est de dimension finie ;*

ii) l'application $S : E/\mathrm{Ker}S \longrightarrow \mathrm{Im}S$ induite par S sur $E/\mathrm{Ker}S$ est un isomorphisme topologique ;

iii) le sous-espace $\mathrm{Im}S$ est fermé de codimension finie.

Démonstration. i) Si $x \in \text{Ker}S$ on a $Tx = x$; donc la restriction de T à Ker$S$ est égale à l'identité qui sera donc un opérateur compact sur Ker$S$; par suite Ker$S$ est de dimension finie.

ii) L'espace Ker$S$ est de dimension finie ; il admet donc un supplémentaire topologique (fermé) V (*cf.* exercice VI. 5.6). La restriction de S à V est un isomorphisme (algébrique) continu de V sur ImS. Montrons que $S^{-1} : \text{Im}S \longrightarrow V$ est continu. Supposons le contraire ; alors il va exister une suite (x_n) de vecteurs tous non nuls dans V telle que $||S(x_n)|| \leq 1$ et $\lim ||x_n|| = +\infty$. Pour tout n, posons $z_n = \frac{x_n}{||x_n||}$. Alors z_n vérifie $||z_n|| = 1$ et $S(z_n) \to 0$. Puisque l'opérateur T est compact on peut extraire de (z_n) une sous-suite $(z_{n_k})_k$ telle que la suite $(T(z_{n_k}))_k$ converge vers un vecteur z. Comme d'autre part $S = I - T$ on a $z_{n_k} = T(z_{n_k}) + S(z_{n_k})$ et $(z_{n_k})_k$ converge aussi vers z (puisque $S(z_{n_k}) \to 0$). Ceci montre que $z = Tz$ et par suite $Sz = 0$, c'est-à-dire $z \in \text{Ker}S$. Mais comme $z_{n_k} \in V$ et que V est fermé, $z \in V$. Donc z appartient à $\text{Ker}S \bigcap V$ qui est égal à $\{0\}$ puisque Ker$S$ et V sont supplémentaires l'un de l'autre ; le vecteur z est donc nul, ce qui contredit le fait que sa norme $||z||$ soit égale à 1 (car $z = \lim z_{n_k}$ avec $||z_{n_k}|| = 1$). Donc $S : V \longrightarrow \text{Im}S$ est un isomorphisme topologique. Mais comme V est topologiquement isomorphe à $E/\text{Ker}S$ l'opérateur $E/\text{Ker}S \longrightarrow \text{Im}S$ induit par S est un isomorphisme topologique.

iii) Montrons que $\overline{\text{Im}S} = \text{Im}S$. Pour cela soit $y \in \overline{\text{Im}S}$; alors il existe une suite (x_n) dans E telle que $y = \lim_{n \to +\infty} Sx_n$. La suite (Sx_n) est donc bornée ; comme l'opérateur $S^{-1} : \text{Im}S \longrightarrow V$ est continu la suite (x_n) est bornée. Comme T est compact de Tx_n on peut extraire une sous-suite $T(x_{n_k})$ convergeant vers un vecteur z. La suite $x_{n_k} = S(x_{n_k}) + T(x_{n_k})$ converge donc vers $y + z$. D'où $y = \lim_{k \to +\infty} S(x_{n_k}) = S(y + z)$, c'est-à-dire $y \in \text{Im}S$; ce qui montre bien que ImS est fermé.

Supposons ImS de codimension infinie. Alors on peut trouver une suite strictement croissante de sous-espaces fermés V_n avec $V_0 = \text{Im}S$. Cette suite va vérifier nécessairement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S(V_n) \subset S(E) = \text{Im}S = V_0 \subset V_{n-1}$. Or ceci ne peut pas être possible puisque cette suite doit être stationnaire d'après la proposition IX. 4.2. □

De ce théorème et sous les mêmes hypothèses on obtient le

4.4. Corollaire. *Si S est injectif, il est un isomorphisme topologique de E sur son image.*

Le théorème que nous allons énoncer et démontrer précise la nature des valeurs spectrales et la structure ensembliste et topologique du spectre d'un opérateur compact.

4.5. Théorème. *Soit T un opérateur compact sur E. Alors*

i) toute valeur spectrale non nulle de T est une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé à λ est finie i.e. λ est de multiplicité finie ;

ii) le spectre $\sigma(T)$ de T est un ensemble compact dénombrable ayant au plus 0 *comme point d'accumulation.*

Démonstration. i) Soit λ un nombre complexe non nul qui n'est pas une valeur propre de T. Alors l'opérateur $T - \lambda I$ est injectif. Comme

$$T - \lambda I = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right)$$

d'après le ix) de l'exercice IX. 5.3, l'opérateur $T - \lambda I$ est un isomorphisme topologique de E sur lui-même ; donc λ n'est pas valeur spectrale de T *i.e.* toute valeur spectrale non nulle de T est une valeur propre de T. Le sous-espace propre V_λ associé à λ est le noyau de $T - \lambda I$ qui est de dimension finie d'après le point i) du théorème IX. 4.3.

ii) Pour démontrer ce point il suffit d'établir que pour tout nombre réel $\delta > 0$ il n'existe qu'un nombre fini de valeurs propres (distinctes ou non) en dehors du disque $D(0, \delta)$. Soient $\delta > 0$, (λ_n) une suite de valeurs propres telles que $|\lambda_n| > \delta$ et (x_n) la suite des vecteurs propres associés respectivement à ces valeurs propres et qu'on supposera linéairement indépendants. Pour tout n, notons E_n le sous-espace de dimension finie (donc fermé) engendré par les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$. La suite (E_n) est donc strictement croissante. Alors d'après le point i) de la démonstration du lemme IX. 4.1. il existe des vecteurs $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ tels que

(IX.11) $$y_n \in E_n, \quad ||y_n|| \leq 1 \quad \text{et} \quad d(y_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

- Comme $|\lambda_n| > \delta$ la suite $\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)$ est bornée ; donc de la suite $\left(T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right)$ on peut extraire une sous-suite $\left(T\left(\frac{y_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)\right)$ telle que

(IX.12) $$\left(T\left(\frac{y_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)\right) \quad \text{converge.}$$

- D'autre part $y_n \in E_n$ peut s'écrire $y_n = \mu_1 x_1 + \ldots \mu_n x_n$. Ce qui donne

$$T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \frac{\mu_k}{\lambda_n} x_k + \mu_n x_n.$$

En posant

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) x_k$$

qui est un vecteur de E_{n-1}, on obtient $T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = y_n + z_n$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n > m$; alors le vecteur $y_m + z_m - z_n$ est dans E_{n-1}. On aura alors

$$\begin{aligned} \left|\left|T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right|\right| &= ||y_n + z_n - (y_m + z_m)|| \\ &= ||y_n - (y_m + z_m - z_n)|| \\ &\geq d(y_n, E_{n-1}) \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\text{(IX.13)} \qquad \left\| T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right\| \geq \frac{1}{2}.$$

Les deux affirmations que traduisent (IX.12) et (IX.13) ne sont compatibles que si la suite des vecteurs linéairement indépendants x_n est finie. Ce qui démontre que le nombre de valeurs propres λ telles que $|\lambda| > \delta$ est fini.

L'ensemble $\sigma(T) - \{0\}$ est donc dénombrable et discret dans $\mathbb{C}$. Si $\dim E = +\infty$ l'opérateur T étant compact ne peut pas, bien sûr, être inversible ; donc 0 est dans le spectre $\sigma(T)$. □

De la proposition IX. 3.3. on peut tirer une conséquence importante. Soit $\widehat{E}$ le complété de E. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \subset \mathrm{Ker}(\widehat{T} - \lambda I)$; d'autre part si pour $\lambda \neq 0$ on a $\widehat{T}x - \lambda x = 0$ avec $x \in \widehat{E}$ alors $x = \frac{1}{\lambda}\widehat{T}x \in E$. Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ on a $\mathrm{Ker}(\widehat{T} - \lambda I) \subset \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$. On en déduit que $\sigma(\widehat{T}) = \sigma(T)$. Pour étudier le spectre d'un opérateur compact T sur un espace non complet E, on peut donc le faire pour le prolongement canonique $\widehat{T}$ de T au complété $\widehat{E}$.

Nous allons terminer ce paragraphe par un calcul explicite du spectre d'un opérateur compact en dimension infinie.

4.6. Exemple

Soit E l'espace de Banach des fonctions réelles continues périodiques de période 1 sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Pour toute fonction $f \in E$ on pose

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

où K est la fonction continue définie sur le carré $[0,1] \times [0,1]$ par

$$K(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}$$

On vérifie facilement que pour toute $f \in E$ on a $T(f)(0) = T(f)(1) = 0$; la fonction $T(f)$ définie a priori sur $[0,1]$ se prolonge donc par périodicité en une fonction continue périodique de période 1 sur $\mathbb{R}$ tout entier. On obtient donc un opérateur T sur E. D'après le point ii) de IX. 3.6, T est compact.

i) Pour toute fonction $f \in E$, $T(f)$ est de classe C^2. En effet

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_0^x y(1-x)f(y)dy + \int_x^1 x(1-y)f(y)dy \\ &= (1-x)\int_0^x yf(y)dy + x\int_x^1 (1-y)f(y)dy. \end{aligned}$$

En dérivant $T(f)$ on obtient

$$T(f)'(x) = -\int_0^x yf(y)dy + \int_x^1 (1-y)f(y)dy.$$

On dérive encore une fois : $T(f)''(x) = -xf(x) - (1-x)f(x) = -f(x)$, c'est-à-dire

(IX.14) $$T(f)'' = -f.$$

Comme f est continue cela montre que $T(f)$ est de classe C^2. On se donne maintenant g une fonction de classe C^2 dans E ; alors un calcul simple mais un peu long donne

$$T(g'') = -g(x) + (1-x)g(0) + xg(1).$$

On voit donc que $T(g'') = -g$ si, et seulement si, g vérifie $g(0) = g(1) = 0$. (Comme g est périodique de période 1, la seule condition $g(0) = 0$ suffit.) Posons

$$V = \{g \in E : g \text{ de classe } C^2 \text{ et g(0)=0}\}.$$

Comme $T(f)'' = -f$ alors $T(f) = 0$ implique $f = 0$ *i.e.* T est injectif. Donc l'application $T : E \longrightarrow V$ est un isomorphisme (algébrique). Le nombre 0 n'est donc pas valeur propre de T mais une valeur spectrale (et c'est la seule bien sûr qui ne soit pas valeur propre).

ii) Cherchons les valeurs propres non nulles λ de T. L'équation $T(f) = \lambda f$ doit donc avoir une solution $f \in E$ non nulle vérifiant $f(0) = 0$ (puisque $f = T(\frac{f}{\lambda})$). D'après (IX.14) une telle fonction doit être de classe C^2 et satisfaire l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

(IX.15) $$\lambda f'' = -f.$$

Inversement, si $f \in V$ est non nulle de classe C^2 et vérifie (IX.15), on a

$$T(f) = T(-\lambda f'') = -\lambda T(f'') = -\lambda(-f) = \lambda f$$

i.e. f est un vecteur propre associé à λ. Déterminer les valeurs propres non nulles de T revient donc à résoudre l'équation différentielle (IX.15). Pour $\lambda < 0$, les solutions ne sont pas périodiques. Supposons donc $\lambda \geq 0$ et posons $\omega^2 = \frac{1}{\lambda}$; alors les solutions vont être *a priori* de la forme

$$f(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$$

où A et B sont des constantes réelles. Comme f doit être périodique de période 1 et doit vérifier $f(0) = f(1) = 0$, ω doit être un multiple entier de 2π et B doit être nulle. D'où $\omega = 2n\pi$, avec $n \in \mathbb{Z}^*$. Les valeurs propres non nulles seront donc de la forme $\lambda_n = \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Chaque valeur propre λ_n est associée au vecteur propre $e_n = \sin(2n\pi x)$.

5. Exercices

5.1. Soient $E = L^2([0,1])$ l'espace des classes (suivant l'égalité presque partout pour la mesure de Lebesgue) de fonctions réelles de carré intégrable sur l'intervalle $[0,1]$ et $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ un homéomorphisme.

i) Donner une condition suffisante sur φ pour que l'application T_φ qui à une fonction f sur $[0,1]$ associe la fonction $T_\varphi(f) = f \circ \varphi$ définisse un opérateur borné sur E.

ii) Donner l'expression explicite d'un homéomorphisme φ qui ne définit pas un opérateur borné du type T_φ.

5.2. On note E l'espace des fonctions réelles continues périodiques de période 2π sur $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

i) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants de l'opérateur $T(f)(x) = f(-x)$.

ii) Montrer que l'opérateur

$$S(f)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x+y)f(y)dy$$

est de rang fini et calculer ses valeurs propres et vecteurs propres associés.

5.3. Soit S un opérateur sur un espace normé E. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $N_k = \mathrm{Ker}S^k$ et $R_k = \mathrm{Im}S^k$ où S^k est le $k^{\text{ème}}$ itéré de S.

i) Montrer que (N_k) est une suite croissante et que s'il existe k tel que $N_k = N_{k+1}$ alors $N_k = N_{k+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) Montrer que la suite (R_k) est décroissante et que s'il existe k tel que $R_k = R_{k+1}$ alors $R_k = R_{k+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $S = I - T$ avec T compact.

iii) Montrer que les suites (N_k) et (R_k) sont stationnaires à partir de certains rangs qu'on notera respectivement p et q.

iv) Montrer que $N_p \cap R_p = \{0\}$.

v) Montrer que $N_q + R_q = E$.

vi) Montrer que $N_q \subset N_p$, que $R_q \subset R_p$ et que $p = q$.

On pose $N = N_p$ et $R = R_p$.

vii) Montrer que la restriction de S à R est un automorphisme topologique.

viii) Montrer que N est le plus grand sous-espace sur lequel S est nilpotent et que R est le plus grand sous-espace stable par S sur lequel S est un automorphisme topologique.

ix) En déduire que, si S est injectif, alors S est un isomorphisme topologique de E sur lui-même.

5.4. Soient ℓ^2 l'espace des suites complexes de carré sommable muni de la norme

$$||x|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ défini par $T(x) = (0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \dots)$ pour tout $x \in \ell^2$. Montrer que T est borné et calculer son spectre.

5.5. Soit $E = C^0([0,1])$ l'espace des fonctions complexes continues muni de la norme de la convergence uniforme.

i) Calculer le spectre de l'opérateur $T(f)(x) = xf(x)$ et montrer qu'il ne contient aucune valeur propre.

ii) Montrer que l'opérateur

$$S(f)(x) = \int_0^1 (x^2 + x) f(y) dy$$

est de rang fini ; calculer son spectre et préciser la nature des valeurs spectrales.

5.6. On rappelle que le cercle $\mathbb{S}^1$ peut être identifié à l'ensemble des nombres complexes de module 1. Tout point $z \in \mathbb{S}^1$ s'écrit $z = e^{2i\pi x}$ où $x \in \mathbb{R}$. L'espace $L^2(\mathbb{S}^1)$ sera par définition l'espace de Hilbert des fonctions complexes mesurables sur $\mathbb{R}$, périodiques de période 1 et dont la restriction à $[0,1]$ est de carré intégrable. Le produit scalaire étant défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx.$$

L'ensemble $\{e^{2i\pi nx}; n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{S}^1)$ *i.e.* toute fonction $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ se développe dans cette base en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{2i\pi nx}$$

où les f_n sont des nombres complexes tels que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |f_n|^2$ converge.

On admet l'assertion suivante : *si α est un nombre réel non rationnel alors l'ensemble $\{e^{2i\pi n\alpha}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans le cercle $\mathbb{S}^1$ toujours vu comme précédemment.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha < 1$ et notons $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la rotation d'angle $2\pi\alpha$.

i) Donner l'expression analytique de R_α en fonction de $z \in \mathbb{S}^1$.

ii) Soit $\lambda = \rho e^{2i\pi\theta}$ un nombre complexe. Résoudre dans $L^2(\mathbb{S}^1)$ l'équation (d'inconnue f), $f \circ R_\alpha - \lambda f = g$ (où $g \in L^2(\mathbb{S}^1)$ est donnée) dans les deux cas qui suivent :

a) $\rho \neq 1$;

b) $\rho = 1$ et α rationnel.

(Dévolopper f et g en série de Fourier et raisonner au niveau des coefficients.)

Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ on pose $T_\alpha(f) = f \circ R_\alpha$.

iii) Montrer que T_α est un automorphisme unitaire de $L^2(\mathbb{S}^1)$ *i.e.* un automorphisme qui vérifie en plus $\langle T_\alpha(f), T_\alpha(g) \rangle = \langle f, g \rangle$ pour f et g quelconques dans $L^2(\mathbb{S}^1)$.

iv) On suppose $\alpha \in [0,1[\cap\mathbb{Q}$. Montrer que le spectre $\sigma(T_\alpha)$ de T_α ne contient que des valeurs propres ; les expliciter ainsi que les sous-espaces propres associés.

v) On suppose $\alpha \in [0,1[\cap\mathbb{Q}^c$ (où $\mathbb{Q}^c$ est l'ensemble des réels irrationnels). Montrer que $\sigma(T_\alpha)$ se confond avec l'ensemble des nombres complexes de module 1.

5.7. Soit $V_k = C^k_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes de classe C^k sur $\mathbb{R}$, périodiques de période 2π muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx.$$

On rappelle que V_k n'est pas complet et que son complété est l'espace E des classes (pour l'égalité presque partout au sens de la mesure de Lebesgue) de fonctions

2π-périodiques mesurables dont la restriction à $[0, 2\pi]$ est de carré intégrable. Soit $\Delta : V_2 \longrightarrow V_0$ l'application linéaire qui à f associe $\Delta f = \frac{d^2 f}{dx^2}$.

i) On se donne $g \in V_0$. Quelle condition doit satisfaire la fonction g pour que l'équation différentielle $\Delta f = g$ admette une solution (dans V_2 bien sûr) ? Résoudre cette équation.

ii) Montrer que $\Delta(V_2)$ est fermé de codimension 1 dans V_0 ayant le sous-espace ξ des fonctions constantes comme orthogonal.

iii) Soit P la projection orthogonale de V_0 sur ξ. Montrer que l'application Δ est inversible à gauche modulo P *i.e.* il existe une application $T : V_0 \longrightarrow V_2$ linéaire et telle que $T\Delta = I - P$.

iv) Montrer que l'application $T : V_0 \longrightarrow V_0$ est un opérateur compact. Calculer son spectre.

5.8. On note λ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ (avec $a < b$). Le mot *intégrable* sera toujours pris au sens de λ. Soit $K : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour toute fonction complexe h bornée sur un espace métrique X, $||h||_\infty$ sera le nombre $\sup_{x \in X} |h(x)|$. On pose $M = ||K||_\infty$.

Etant donnée une fonction intégrable $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, on cherche à construire une solution intégrable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de équation :

$$\text{(E)} \qquad f(x) - \int_a^b K(x, y) f(y) d\lambda(y) = g(x).$$

appelée *équation intégrale* de *noyau* K.

Pour toute fonction intégrable $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ on note Th la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$Th(x) = \int_a^b K(x, y) h(y) d\lambda(y).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n h$ sera par définition h si $n = 0$ et $T^n h = T(T^{n-1} h)$ si $n \geq 1$.

i) Montrer que pour toute fonction intégrable $[a, b] \xrightarrow{h} \mathbb{C}$, $(Th)(x)$ est une quantité bien définie représentant une fonction continue de $x \in [a, b]$.

ii) On note E l'espace des fonctions continues $[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ muni de la norme $|| \ ||_\infty$. Montrer que T est un opérateur borné sur E.

iii) Montrer que pour tout n on a

$$||T^n g||_\infty \leq ||g||_1 \left(M^n (b - a)^{n-1}\right)$$

où $||g||_1$ est la norme L^1 de g *i.e.* $||g||_1 = \int_a^b |g(x)| d\lambda(x)$.

On suppose la condition suivante vérifiée : $M < \frac{1}{b-a}$.

iv) Montrer que la suite (f_n), définie par $f_n = g + Tg + \ldots + T^{n-1} g$ (dite *série de Neumann*), converge uniformément vers une fonction intégrable f.

v) Montrer que la fonction $f = g + Tg + T^2 g + \ldots + T^n g + \ldots$ ainsi construite est une solution de l'équation (E).

vi) On ne fait plus l'hypothèse $M < \frac{1}{b-a}$ mais on suppose que K est un *noyau de Volterra i.e.* $K(x,y) = 0$ pour $a \leq x < y \leq b$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [a,b]$ on a :

$$|T^n g(x)| \leq ||g||_1 M^n \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

et en déduire que la suite (f_n), définie par $f_n = g + Tg + \ldots + T^{n-1}g$, converge uniformément vers une fonction intégrable f solution de l'équation (E).

vii) Maintenant on suppose que K est de la forme $K(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$ avec $\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et vérifiant la condition : $\int_a^b \alpha(x)\beta(x) d\lambda(x) = 0$. Construire explicitement la solution $f = \sum_{n=0}^{\infty} T^n g$ de l'équation (E).

CHAPITRE X
Opérateurs sur les espaces de Hilbert

Ce chapitre est consacré à l'étude des opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert. Le fait que de tels espaces supportent un produit scalaire et la connaissance explicite des formes linéaires continues permettent de préciser beaucoup de notions (par exemple celle d'adjoint) et d'établir l'existence d'un ordre sur l'ensemble des opérateurs hermitiens. En particulier, sur un espace de Hilbert, tout opérateur compact peut être approché (pour la topologie de la norme) par un opérateur de rang fini. En plus le spectre d'un opérateur hermitien compact possède des propriétés remarquables similaires à celles des matrices hermitiennes opérant sur un espace de dimension finie.

Dans toute la suite $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ sera un espace de Hilbert (réel ou complexe).

1. Adjoint et opérateurs hermitiens

Soit T un opérateur sur E. Comme toute forme linéaire continue y' sur E est définie par un élément $y \in E$ *i.e.* $y'(x) = \langle x, y\rangle$ pour tout $x \in E$, l'adjoint T^* de T définit un opérateur sur E qu'on appellera encore l'*adjoint* et qu'on notera toujours T^* caractérisé par l'égalité

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \tag{X.1}$$

pour tous $x, y \in E$. L'application $T \in L(E) \longmapsto T^* \in L(E)$ est une involution antilinéaire *i.e.* elle vérifie

$$(T+S)^* = T^* + S^*$$
$$(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$$
$$(T^*)^* = T$$

En plus on a $(TS)^* = S^*T^*$. L'opérateur I vérifie $I^* = I$. Si $T \in L(E)$ alors T est inversible à gauche si, et seulement si, T^* est inversible à droite, inversible si, et seulement si, T^* l'est et on a $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

On dira que l'opérateur T est *hermitien* (si E est complexe) ou *auto-adjoint* (si E est réel) s'il est égal à son adjoint ou pour tous $x, y \in E$ on a

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle. \tag{X.2}$$

Que l'espace E soit réel ou complexe on parlera simplement d'opérateur hermitien.

1.1. Exemples d'opérateurs hermitiens

i) Soit T un opérateur quelconque sur E ; alors les opérateurs

$$\frac{1}{2}(T+T^*), \quad \frac{1}{2i}(T-T^*) \quad \text{et} \quad T^*T$$

sont hermitiens.

ii) Si T est hermitien et $S \in L(E)$ quelconque alors S^*TS est hermitien.

iii) Si T et S sont deux opérateurs hermitiens qui commutent, leur produit TS est hermitien.

iv) Soit V un sous-espace fermé de E et considérons l'opérateur de projection orthogonale $P : E \longrightarrow V$. Alors P est hermitien. En effet, on a, pour tous $x, y \in E$

$$\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py + y - Py\rangle.$$

Comme $\langle Px, y - Py\rangle = 0$, on a $\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py\rangle$. Pour la même raison on a $\langle Px, Py\rangle = \langle x - x + Px, Py\rangle = \langle x, Py\rangle$; d'où $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ *i.e.* P est hermitien.

v) Bien entendu, toute matrice complexe hermitienne d'ordre n définit un opérateur hermitien sur $\mathbb{C}^n$.

vi) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et notons E l'espace de Hilbert des classes de fonctions mesurables complexes de carré intégrable sur Ω muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

Soit φ mesurable μ-essentiellement bornée sur Ω. Pour $f \in E$, on pose

$$T_\varphi(f)(x) = \varphi(x)f(x).$$

Alors T_φ est un opérateur borné sur E. On vérifie facilement que l'adjoint de T_φ est $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$; donc si φ est réelle, T_φ est hermitien.

Un opérateur hermitien est inversible dès qu'il est inversible à droite ou à gauche. Comme dans un espace de Hilbert un sous-espace fermé admet toujours un supplémentaire topologique (son orthogonal), on peut donner un énoncé plus précis du théorème IX. 1.3, qui se démontre exactement de la même façon.

1.2. Théorème. *Soit $T \in L(E)$ hermitien. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes*

i) T est inversible ;

ii) il existe un réel $m > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait $||Tx|| \geq m||x||$;

iii) T est injectif et $Im(T)$ est un sous-espace fermé.

On a aussi la proposition suivante.

1.3. Proposition. *Soit T un opérateur sur E. Alors*

$$(\text{Im T})^\perp = \text{Ker}T^* \quad \text{et} \quad (\text{Ker}T)^\perp = \overline{(\text{Im}T^*)}.$$

Démonstration. Si $y \in E$ est orthogonal à l'image de T on a $\langle Tx, y\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Mais $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ par définition de l'adjoint ; donc $\langle x, T^*y\rangle = 0$ et ceci pour tout $x \in E$; par suite $T^*y = 0$ *i.e.* $y \in \text{Ker}T^*$. Réciproquement, soit

$y \in \mathrm{Ker}T^*$; de la même manière on démontre que $y \in (\mathrm{Im}T)^\perp$. Pour la deuxième égalité on a

$$\overline{\mathrm{Im}(T^*)} = \left(\mathrm{Im}(T^*)^\perp\right)^\perp = (\mathrm{Ker}(T))^\perp .$$

Ce qui démontre la proposition. □

On peut remarquer que si l'opérateur T est hermitien on a

$$E = \mathrm{Ker}\ T \oplus \overline{\mathrm{Im}\ T}. \tag{X.3}$$

Soit $T \in L(E)$. Alors on peut définir une forme sesquilinéaire sur E en posant $f(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ pour tous $x, y \in E$. On vérifie facilement que T est hermitien si, et seulement si, cette forme sesquilinéaire f est hermitienne ou encore si $\langle Tx, x\rangle$ est réel pour tout $x \in E$.

1.4. Proposition. *Soit T un opérateur hermitien non nul (pour T nul l'énoncé est trivial) sur E. Alors sa norme $|||T|||$ est donnée par*

$$|||T||| = \sup_{||x||\leq 1} |\langle Tx, x\rangle| = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle|$$

i.e. $|||T|||$ est égale à la norme de la forme quadratique Φ associée à la forme hermitienne $f(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ définie par T.

Démonstration. i) Montrons d'abord que $|||T||| = |||f|||$. On a

$$\begin{aligned}|||f||| &= \sup_{||x||,||y||\leq 1} |\langle Tx, y\rangle| \\ &\leq \sup_{||x||\leq 1} ||Tx|| \\ &\leq |||T|||.\end{aligned}$$

Pour $y = \frac{Tx}{||Tx||}$ (avec $Tx \neq 0$) on constate que l'égalité est atteinte. Ce qui montre que $|||T||| = |||f|||$.

ii) La norme de Φ est donnée par

$$\begin{aligned}|||\Phi||| &= \sup_{x\neq 0} \frac{|\langle Tx, x\rangle|}{||x||^2} \\ &= \sup_{||x||\leq 1} |\langle Tx, x\rangle| \\ &\leq \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |\langle Tx, y\rangle|.\end{aligned}$$

D'où $|||\Phi||| \leq |||f||| = |||T|||$. Soient $x, y \in E$ tels que $||x|| \leq 1$ et $||y|| \leq 1$. Calculons la valeur absolue de la partie réelle du nombre complexe $\langle Tx, y\rangle$ en utilisant la forme quadratique Φ. On a

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}\langle Tx,y\rangle| &= \left|\frac{1}{4}\{\Phi(x+y)-\Phi(x-y)\}\right| \\ &\leq \frac{1}{4}\{|\Phi(x+y)|+|\Phi(x-y)|\} \\ &\leq \frac{1}{4}|||\Phi|||\left\{||x+y||^2+||x-y||^2\right\}.\end{aligned}$$

Le dernier terme est égal (d'après l'identité du parallélogramme) à

$$\frac{1}{2}|||\Phi|||\left\{||x||^2+||y||^2\right\}.$$

Ce qui donne $|\mathcal{R}\langle Tx,y\rangle| \leq \frac{1}{2}|||\Phi|||\left\{||x||^2+||y||^2\right\} \leq |||\Phi|||$.

On peut remarquer que pour tous $x, y \in E$ le nombre complexe $\langle Tx, e^{i\theta}y\rangle$ est réel si $\theta = \operatorname{Arg}\langle Tx,y\rangle$ et a même module que $\langle Tx,y\rangle$. On peut donc supposer que $\langle Tx,y\rangle$ est réel. On aura donc d'après ce qui précède $|\langle Tx,y\rangle| \leq |||\Phi|||$ pour tous $x, y \in E$ de norme inférieure ou égale à 1. Par suite $|||f||| \leq |||\Phi|||$; donc $|||T||| = |||\Phi|||$. □

1.5. Corollaire. *Pour tout opérateur hermitien $T \in L(E)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$|||T^n||| = |||T|||^n \tag{X.4}$$

Démonstration. i) Démontrons d'abord que, pour tout opérateur $T \in L(E)$ (qu'il soit hermitien ou non), on a $|||T^*T||| = |||T|||^2$. En effet pour tout $x \in E$ on a $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2$. D'où en prenant le sup pour $||x|| \leq 1$, $|||T^*T||| = |||T|||^2$.

ii) Cette égalité appliquée à T hermitien donne $|||T^2||| = |||T|||^2$. Par suite pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\left|\left|\left|T^{2^m}\right|\right|\right| = \left|\left|\left|T\right|\right|\right|^{2^m}$. Soient $n \in \mathbb{N}$ quelconque et $p \geq n$ tel que $p = 2^m$ pour un certain entier m. Alors

$$\begin{aligned}|||T|||^p &= |||T^p||| \\ &= |||T^{n+(p-n)}||| \\ &\leq |||T^n|||.|||T^{(p-n)}||| \\ &\leq |||T^n|||.|||T|||^{(p-n)}.\end{aligned}$$

Ce qui donne $|||T|||^n \leq |||T^n|||$. Comme de manière générale $|||T^n||| \leq |||T|||^n$, on a l'égalité $|||T^n||| = |||T|||^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Remarquons que si un sous-espace vectoriel V de E est stable par un opérateur T alors son adhérence $\overline{V}$ est encore stable par T.

1.6. Proposition. *Soient V un sous-espace vectoriel fermé de E et $T \in L(E)$ hermitien. Alors*

i) si V est stable par T, son orthogonal $V^\perp$ est aussi stable par T ;

ii) pour que V soit stable par T il faut, et il suffit, que T commute avec l'opérateur de projection orthogonale $P : E \longrightarrow V$.

Démonstration. i) Supposons V stable par T et soient $x \in V^{\perp}$ et $y \in V$. Alors

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0.$$

Donc $V^{\perp}$ est aussi stable par T.

ii) Supposons V stable par T et soit $x \in E$. Alors $Px \in V$, donc $TPx \in V$; par suite $PTPx = TPx$ car P coincide avec l'identité sur V. On a donc $PTP = TP$. Prenons les adjoints des deux membres de cette égalité. On obtient $PTP = PT$ puisque T et P sont hermitiens. D'où $TP = PT$. Réciproquement supposons $TP = PT$ et soit $x \in V$. On a $Px = x$; donc $PTx = TPx = Tx$. Comme $PTx \in V$ on en déduit que $Tx \in V$ *i.e.* V est stable par T. □

Nous terminons ce paragraphe par l'importante propriété de densité de l'espace $\mathcal{RF}(E)$ des opérateurs de rang fini (*i.e.* dont l'image est de dimension finie) sur E dans l'espace $\mathcal{K}(E)$ des opérateurs compacts.

1.7. Proposition. *L'espace $\mathcal{RF}(E)$ est dense dans $\mathcal{K}(E)$ pour la topologie de la norme.*

Démonstration. Soient $T \in \mathcal{K}(E)$, $\varepsilon > 0$ et B la boule unité de E. Comme $T(B)$ est une partie relativement compacte on peut la recouvrir par un nombre fini de boules $B(y_1, \varepsilon), \ldots, B(y_k, \varepsilon)$ de rayon ε. Soit F le sous-espace de dimension finie (inférieure ou égale à k) engendré par $y_1, \ldots, y_k$. Alors F est complet et on peut donc considérer la projection orthogonale $P : E \longrightarrow F$. L'opérateur $S = PT$ est de rang fini. Soit $x \in B$; alors il existe k_0 tel que $Tx \in B(y_{k_0}, \varepsilon)$. Donc $||Sx - Tx|| \leq \varepsilon$. Ce qui donne $|||T - S||| \leq \varepsilon$ et montre que $\overline{\mathcal{RF}(E)} = \mathcal{K}(E)$. □

2. Opérateurs positifs

L'existence de l'ordre sur le corps des réels $\mathbb{R}$ permet de munir l'ensemble des opérateurs hermitiens sur un espace de Hilbert d'un ordre partiel.

2.1. Définition. *On dira qu'un opérateur hermitien T sur E est* **positif** *et on note $T \geq 0$ si pour tout $x \in E$, $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ ou si la forme quadratique Φ définie par T est positive ;* **strictement positif** *si $\langle Tx, x\rangle > 0$ pour tout x non nul.*

Il est clair que la somme de deux opérateurs positifs (resp. strictement positifs) est un opérateur positif (resp. strictement positif) et que le produit d'un opérateur positif par un réel positif est un opérateur positif.

Bien sûr la notion de positivité n'a de sens que pour les opérateurs hermitiens ; "opérateur positif" signifie donc implicitement "opérateur hermitien positif". Les exemples d'opérateurs hermitiens positifs sont nombreux ; donnons en quelques-uns.

2.2. Exemples

i) L'opérateur identité I sur E est strictement positif puisque pour tout $x \in E$ non nul on a $\langle x, x\rangle = ||x||^2 > 0$.

ii) Pour tout opérateur $T \in L(E)$ non nul l'opérateur T^*T est positif ; en effet si $x \in E$ on a $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2 \geq 0$.

iii) Soient V un sous-espace vectoriel fermé de E et $P : E \longrightarrow V$ l'opérateur de projection orthogonale sur V. Alors P est positif car

$$\langle Px, x\rangle = \langle Px, Px\rangle = ||Px||^2 \geq 0.$$

iv) Reprenons l'exemple vi) de X. 1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et notons E l'espace de Hilbert des fonctions mesurables complexes de carré intégrable sur Ω muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

Pour toute fonction réelle φ mesurable μ-essentiellement bornée sur Ω on pose

$$T_\varphi(f)(x) = \varphi(x)f(x).$$

Alors T_φ est un opérateur hermitien sur E. Si φ est positive, T_φ est positif ; si en plus φ est strictement positive en dehors d'un ensemble de mesure nulle, T est strictement positif.

Soit $T \in L(E)$ positif. Comme la forme hermitienne associée à T est positive elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour tous $x, y \in E$:

(X.5) $$|\langle Tx, y\rangle|^2 \leq \langle Tx, x\rangle\langle Ty, y\rangle.$$

De cette inégalité on déduit, en prenant la borne supérieure du second membre pour $||y|| \leq 1$ et en faisant $y = \frac{Tx}{||Tx||}$ (en supposant $Tx \neq 0$) au premier

(X.6) $$||Tx||^2 \leq |||T|||\langle Tx, x\rangle.$$

De cette relation on obtient l'implication suivante $\langle Tx, x\rangle = 0 \Longrightarrow Tx = 0$ et donc si $\langle Tx, x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$ alors $T = 0$. Il est clair que si T et $-T$ sont positifs l'opérateur T est identiquement nul. Ceci nous permet de définir la relation suivante. Soient T et S deux opérateurs hermitiens ; alors

$$T \leq S \Longleftrightarrow S - T \geq 0.$$

On vérifie facilement que $\leq$ est une relation d'ordre partiel sur l'espace $\mathcal{H}(E)$ des opérateurs hermitiens sur E invariante par translation *i.e.* pour tous $T, S, U \in \mathcal{H}(E)$, $T \leq S \Longrightarrow T + U \leq S + U$.

Soit $T \in \mathcal{H}(E)$. Alors, comme T est borné, les deux nombres réels suivants existent

(X.7) $$\alpha = \inf_{||x||=1} \langle Tx, x\rangle \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{||x||=1} \langle Tx, x\rangle.$$

Ils sont appelés respectivement *borne inférieure* et *borne supérieure* de T. On a bien entendu

(X.8) $$|||T||| = \max(|\alpha|, |\beta|).$$

2.3. Proposition. *Soit T un opérateur positif sur E. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*

i) T est inversible ;

ii) sa borne inférieure α est strictement positive.

Démonstration. ii)$\Longrightarrow$i). On suppose ii) vraie *i.e.* $\alpha > 0$; cela signifie en particulier que T est strictement positif. On a

$$\alpha = \inf_{||x||=1} \langle Tx, x\rangle = \inf_{x\neq 0} \frac{\langle Tx, x\rangle}{||x||^2}.$$

D'où pour tout $x \in E$, $\langle Tx, x\rangle \geq \alpha||x||^2$. Comme T est positif, la forme hermitienne $f(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ est positive ; en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient $||Tx||.||x|| \geq \langle Tx, x\rangle \geq \alpha||x||^2$ c'est-à-dire $||Tx|| \geq \alpha||x||$ pour tout $x \in E$. Donc T est inversible d'après le théorème X. 1.2.

i)$\Longrightarrow$ii)

Supposons T inversible d'inverse S. Alors pour tout $x \in E$ on a $STx = x$. Donc $||x|| = ||STx|| \leq |||S|||.||Tx||$ ou encore $||x||^2 \leq |||S|||^2.||Tx||^2$. Par l'inégalité (X.6) nous avons $||x||^2 \leq |||S|||^2.|||T|||\langle Tx, x\rangle$. Ce qui est encore équivalent à $\langle Tx, x\rangle \geq \frac{1}{|||S|||^2.|||T|||}||x||^2$. Ce qui montre que $\alpha \geq \frac{1}{|||S|||^2.|||T|||} > 0$. Ceci termine la démonstration. □

3. Spectre d'un opérateur hermitien compact

Le théorème de décomposition spectrale pour un opérateur hermitien compact est certainement l'un des résultats les plus profonds de la théorie des opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert. La démonstration que nous en donnerons permet de construire en même temps les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles.

3.1. Propostion. *Soit T un opérateur hermitien non nul sur E. Alors*

i) T a toutes ses valeurs propres réelles ;

ii) si en plus T est compact, il admet une valeur propre λ telle que $|\lambda| = |||T|||$.

Démonstration. i) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de T associée à un vecteur propre x. Alors $\lambda\langle x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle$. En simplifiant par $\langle x, x\rangle$ qui est non nul on obtient $\lambda = \overline{\lambda}$; ce qui montre que la valeur propre λ est réelle.

ii) Par la proposition X. 1.4. on a $|||T||| = \sup_{||x||=1} |\langle Tx, x\rangle|$. Il existe donc une suite (x_n) de vecteurs de norme égale à 1 telle que $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |||T|||$. Quitte à extraire de (x_n) une sous-suite on peut en fait supposer qu'elle est telle que $(\langle Tx_n, x_n\rangle)$ converge vers un nombre réel λ avec $|\lambda| = |||T|||$. Comme T est compact on peut aussi supposer que la suite (Tx_n) converge vers un vecteur $z \in E$. D'où

$$\begin{aligned}||Tx_n - \lambda x_n||^2 &= \langle Tx_n - \lambda x_n, Tx_n - \lambda x_n\rangle \\ &= ||Tx_n||^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2||x_n||^2.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $|\lambda| = |||T|||$ on obtient

$$||Tx_n - \lambda x_n||^2 \leq 2\left(|||T|||^2 - \lambda\langle Tx_n, x_n\rangle\right).$$

Ce qui montre que, lorsque $n \to +\infty$, le vecteur $Tx_n - \lambda x_n \to 0$ et par suite $x_n \to \frac{z}{\lambda}$ qu'on notera x. On aura donc $Tx = \lim_{n\to+\infty} Tx_n = \lambda x$. Ceci montre que λ est une valeur propre de l'opérateur T associée au vecteur propre non nul x puisque $||x|| = 1$ car $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ avec $||x_n|| = 1$. □

Soit T un opérateur hermitien compact sur E. On notera V_0 son noyau. On sait (*cf.* théorème IX. 4.5.) que tous les éléments non nuls du spectre $\sigma(T)$ sont des valeurs propres. Pour tout $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$ notons V_λ le sous-espace propre associé à λ qui est de dimension finie.

3.2. Théorème *Soit T un opérateur hermitien compact sur E. Alors*

i) les sous-espaces V_λ sont deux à deux orthogonaux ;

ii) on a $\left(\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)-\{0\}} V_\lambda\right)^\perp = V_0$.

iii) L'espace E est somme directe orthogonale de V_0 et de tous les sous-espaces V_λ i.e. $E = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)-\{0\}} V_\lambda\right)$.

Démonstration. i) Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes et x et y deux vecteurs propres (non nuls bien sûr) associés respectivement à λ et μ. On a $\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle$. Ce qui donne forcément $\langle x, y\rangle = 0$ *i.e.* x et y sont orthogonaux ; par suite les sous-espaces V_λ et V_μ sont orthogonaux.

ii) Posons $E_1 = E$ et $T_1 = T$. D'après la proposition X. 3.1, il existe $\lambda_1 \in \sigma(T_1)$ tel que $|\lambda_1| = |||T_1|||$. Soit e_1 un vecteur propre de norme 1 associé à λ_1. Notons E_2 le sous-espace de E orthogonal à e_1 ; E_2 est fermé, donc complet. Comme T_1 est hermitien E_2 est stable par T_1 et la restriction T_2 de T_1 à ce sous-espace est un opérateur hermitien compact. La proposition X. 3.1, appliquée à T_2 opérant sur E_2, montre l'existence d'une valeur propre λ_2 associée à un vecteur propre e_2 de norme 1 et telle que $|\lambda_2| = |||T_2|||$. On a forcément $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

En répétant le processus on obtient une suite d'opérateurs hermitiens compacts (T_n), $n \geq 1$ (avec $T_1 = T$) opérant respectivement sur des sous-espaces E_n ($E_1 = E$) fermés tels que $E_n \subset E_{n-1}$ et $T_n = T_{n-1|_{E_n}}$ et une suite de valeurs propres (λ_n), $n \geq 1$ associées respectivement à une suite (e_n) de vecteurs propres tels $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}|$ et E_n est l'orthogonal de $\bigoplus_{k=1}^{n-1} \mathbb{K}e_k$. Montrons que la suite (λ_n) tend vers 0. Supposons le contraire *i.e.* il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|\lambda_n| \geq \delta$. Alors comme les vecteurs e_n forment un système orthonormal on a

$$||Te_n - Te_m|| = ||\lambda_n e_n - \lambda_m e_m|| \geq \delta\sqrt{2}.$$

Ceci contredit le fait que la suite (Te_n) est relativement compacte puisque l'opérateur T est compact.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'assertion ii). Le sous-espace orthogonal à tous les vecteurs e_n est $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$. Soit $x \in A$; alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $||Tx|| \leq |\lambda_n|.||x||$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$ on a $Tx = 0$ *i.e.* $x \in V_0$. Réciproquement, supposons $Tx = 0$; alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$\lambda_n\langle x, e_n\rangle = \langle x, Te_n\rangle = \langle Tx, e_n\rangle = 0$. Donc x est orthogonal à tous les e_n. Cela veut dire

$$\left(\bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)-\{0\}} V_\lambda\right)^\perp = V_0.$$

iii) Le sous-espace V_0 est orthogonal à tous les vecteurs e_n ; il est donc orthogonal (et c'est exactement l'orthogonal) au sous-espace vectoriel fermé engendré par ces mêmes vecteurs. Comme pour tout sous-espace fermé X de E on a $E = X \oplus X^\perp$, on obtient $E = V_0 \oplus \bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)-\{0\}} V_\lambda$. Le théorème est donc démontré. □

3.3. Corollaire. *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $S : H \longrightarrow H$ un opérateur hermitien compact. Notons $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ le complété de H et T le prolongement de S à E qui est un opérateur hermitien compact. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des valeurs propres non nulles de T et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite orthonormale de vecteurs propres (λ_n est associée à e_n) formant une base hilbertienne de l'orthogonal du noyau N de T. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \in H$ et pour tout $x \in E$ on a*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty}\langle Tx, e_n\rangle e_n = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n$$

où la série converge pour la norme $\|\ \ \|$ associée à $\langle\ ,\ \rangle$. En particulier, si $x \in H$ on a

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty}\langle Sx, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle x, e_n\rangle e_n.$$

Démonstration. Le fait que $e_n \in H$ découle de $Te_n = \lambda_n e_n$ et du fait que T prend ses valeurs dans H (*cf.* IX. 3.3). D'après le théorème X. 3.2, tout vecteur $x \in E$ s'écrit sous la forme $x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$ où x_0 est la projection orthogonale de x sur N et la série converge pour la norme $\|\ \ \|$. Le reste découle immédiatement du théorème X. 3.2. □

Le théorème qui suit donne certaines conditions pour améliorer le type de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\langle Sx, e_n\rangle e_n$.

3.4. Théorème. *Soient $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $S : H \longrightarrow H$ un opérateur hermitien. Soit $\|\ \ \|'$ une autre norme telle que $\|\ \ \| \leq \|\ \ \|'$. Si S est compact en tant qu'opérateur de $(H, \|\ \ \|)$ dans $(H, \|\ \ \|')$, pour tout $x \in H$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\langle Sx, e_n\rangle e_n$ (donnée par le corollaire précédent) converge vers Sx pour la norme $\|\ \ \|'$.*

Démonstration. Comme $S : (H, \|\ \ \|) \longrightarrow (H, \|\ \ \|')$ est compact et l'application identité $(H, \|\ \ \|') \longrightarrow (H, \|\ \ \|)$ continue, $S : (H, \|\ \ \|) \longrightarrow (H, \|\ \ \|)$ est compact. Soit $x \in H$. Par le corollaire X. 3.3 on a $Sx = \sum_{n=1}^{\infty}\langle Sx, e_n\rangle e_n$. Pour tout $n \geq 1$, posons $x_n = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k$. La suite (x_n) converge, dans le complété de H, vers $x - x_0$ et est donc bornée pour la norme $\|\ \ \|$. On a

$$\begin{aligned}
Sx_n &= S\left(\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle S(e_k) \quad \text{(par linéarité de } S\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle \lambda_k e_k \quad (e_k \text{ est vecteur propre de } S) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle x, \lambda_k e_k\rangle e_k \quad \text{(par linéarité de } \langle\ ,\ \rangle) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle x, S(e_k)\rangle e_k \quad (e_k \text{ est vecteur propre de } S) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle Sx, e_k\rangle e_k \quad \text{(car } S \text{ est hermitien).}
\end{aligned}$$

Supposons que la suite $(S(x_n))$ ne converge pas vers Sx pour la norme $|| \ ||'$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(S(x_{n_\ell}))_\ell$ de $(S(x_n))$ telle que, pour tout ℓ, $||Sx - S(x_{n_\ell})||' > \varepsilon$. Comme $S : (H, || \ ||) \longrightarrow (H, || \ ||')$ est compact et (x_n) bornée pour la norme $|| \ ||$, $S(x_{n_\ell})$ admet une sous-suite $S(x_{n_{\ell'}})$ convergeant pour la norme $|| \ ||'$ vers un vecteur $z \in H$, donc aussi pour la norme $|| \ ||$. De façon évidente $z \neq Sx$; ce qui est absurde puisque $S(x_n)$ converge vers Sx pour $|| \cdot ||$. □

4. Exemple d'utilisation du spectre

Beaucoup de problèmes de Physique amènent à des *équations intégrales* du type

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)dt + g(s)$$

où K est une fonction réelle continue symétrique sur $[a,b] \times [a,b]$, g une fonction réelle de carré intégrable sur $[a,b]$ toutes les deux données et f une fonction réelle de carré intégrable que l'on cherche à déterminer. Ce type d'équations s'écrit de manière générale sous la forme

$$(*) \qquad Tx - \lambda x = y$$

où x, y sont des vecteurs d'un espace de Hilbert E et T un opérateur hermitien compact sur E. La connaissance du spectre de T permet de donner explicitement les solutions de l'équation $(*)$.

Notons $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des valeurs propres non nulles de T données par le théorème X. 3.2. On prendra $\lambda_0 = 0$, on notera V_0 le noyau de T et V_n le sous-espace propre associé à λ_n. Pour tout vecteur $z \in E$, soient z_0 sa projection orthogonale sur V_0 et z_n celle sur V_n. Alors on a un développement unique

$$z = z_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} z_n \quad \text{avec} \quad ||z||^2 = ||z_0||^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} ||z_n||^2.$$

En développant x et y sous cette forme et en remplaçant formellement dans l'équation $(*)$ on obtient $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(\lambda_n - \lambda)x_n - \lambda x_0 = y_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ qui nous donne le système suivant équivalent à l'équation $(*)$

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} -\lambda x_0 = y_0 \\ (\lambda_n - \lambda)x_n = y_n \\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} ||x_n||^2 < +\infty \end{cases}$$

La dernière condition exprime l'appartenance de la solution à l'espace E.

1er cas : $\lambda = 0$.

Une condition nécessaire pour que le système ait une solution est $y_0 = 0$. Supposons-la remplie. Le système se réduit alors à (pour $n \geq 1$)

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} \lambda_n x_n = y_n \\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} ||x_n||^2 < +\infty \end{cases}$$

Si la solution x existe, elle est nécessairement donnée par $x_n = \frac{y_n}{\lambda_n}$ et x_0 est arbitraire. Le vecteur défini ainsi est une vraie solution si, et seulement si, la série suivante $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{||y_n||^2}{\lambda_n^2}$ converge. L'espace des solutions est paramétré par V_0.

2ème cas : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda = \lambda_k$.

Pour que (S) ait une solution, il est nécessaire d'avoir $y_k = 0$; supposons que ceci est vrai et prenons x_k quelconque. On a alors pour $n \neq k$

$$x_0 = -\frac{y_0}{\lambda} \quad \text{et} \quad x_n = \frac{y_n}{\lambda_n - \lambda}.$$

Comme l'ensemble $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ est discret on a $\delta = \inf_{n\neq k} |\lambda_n - \lambda| > 0$. Donc $\left|\left|\frac{y_n}{\lambda_n-\lambda}\right|\right| \leq \delta^{-1}||y_n||$ pour $n \neq k$. Par conséquent $\sum_{n\neq k} ||x_n||^2 < +\infty$ et la solution générale est $x = -\frac{y_0}{\lambda} + \sum_{n\neq k} \frac{y_n}{\lambda_n-\lambda}$ paramétrée par V_k.

3ème cas : $\lambda \notin \sigma(T)$.

Cette fois-ci il n'y a aucune obstruction. Pour tout $y \in E$ il y a une solution unique $x \in E$ donnée par $x = -\frac{y_0}{\lambda} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{y_n}{\lambda_n-\lambda}$. Le raisonnement est pratiquement le même que celui qui précède. □

5. Exercices

5.1. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert et $T : E \longrightarrow E$ une application linéaire telle qu'il existe une autre application linéaire $S : E \longrightarrow E$ vérifiant, pour tous $x, y \in E$: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$.

Montrer que T est un opérateur borné sur E. (Montrer que l'application $(x, y) \in E\times E \longrightarrow \langle Tx, y\rangle \in \mathbb{K}$ est séparément continue et appliquer le théorème de Banach-Steinhaus.)

5.2. Soit E un espace de Hilbert séparable. On rappelle qu'une partie M de E est dite *faiblement bornée* si, pour tout $x \in E$, l'ensemble $(\langle f, x\rangle)_{f\in M}$ est borné dans $\mathbb{C}$; elle est dite *faiblement compacte* si de toute suite $(f_n)_{n\geq 1}$ dans M, on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ faiblement convergente dans M (*i.e.* il existe $f \in M$ tel que $\forall x \in E$ la suite $(\langle f_{n_k}, x\rangle)_k$ converge vers $\langle f, x\rangle$). On a la propriété : *toute partie faiblement bornée est faiblement relativement compacte.*

Soient $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne dans E et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels tendant vers 0. Pour tout $x \in E$ on pose $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$.

Montrer que T est un opérateur auto-adjoint compact sur E.

5.3. Soient E un espace de Hilbert séparable, $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne et T un opérateur borné sur E.

i) Montrer que le nombre (fini ou infini) $\sum_{i=1}^{\infty} ||Te_i||^2$ ne dépend pas de la base choisie (e_i). On dira que T est de Hilbert-Schmidt si $\sum_{i=1}^{\infty} ||Te_i||^2 < +\infty$.

ii) En déduire que l'adjoint d'un opérateur de Hilbert-Schmidt est aussi de Hilbert-Schmidt.

Soit $\mathcal{HS}(E)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur E.

iii) Montrer que $\mathcal{HS}(E)$ est un espace vectoriel.

iv) Montrer que $|||T|||_0 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} ||Te_i||^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme préhilbertienne sur $\mathcal{HS}(E)$.

v) Montrer que l'on a $|||T||| \leq |||T|||_0$ où $|||\ \ |||$ est la norme habituelle de l'opérateur T.

vi) Montrer que $\mathcal{HS}(E)$ est un espace de Hilbert.

vii) Montrer que $\mathcal{HS}(E)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $L(E)$ des opérateurs bornés sur E.

viii) Montrer que $\mathcal{HS}(E)$ contient les opérateurs de rang fini sur E et qu'ils y sont denses pour la norme $|||\ \ |||_0$.

ix) En déduire que tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

5.4. Soient E l'espace des fonctions continues à valeurs complexes sur $[0,1]$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$, $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue à valeurs complexes vérifiant $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ et T l'opérateur compact sur E défini par $T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$.

i) Montrer que l'opérateur T est hermitien.

ii) Montrer que la suite (λ_n) des valeurs propres de T (chacune comptée avec son ordre de multiplicité) vérifie $\sum_n \lambda_n^2 \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy\right) dx$.

iii) En déduire que T se prolonge en un opérateur de Hilbert-Schmidt sur le complété $\widehat{E}$ de E.

5.5. Pour tout corps $\mathbb{K}$ on note $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\overline{P}$ est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués respectifs de ceux de P. Si E est un espace de Hilbert complexe $L(E)$ sera l'algèbre de Banach des opérateurs bornés sur E. Pour tout $T \in L(E)$ on désignera par T^* l'adjoint de T.

Soit $T \in L(E)$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrivant $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ on pose $P(T) = a_0I + a_1T + cldots + a_nT^n$.

i) Montrer que l'application $\Phi_T : \mathbb{C}[X] \longrightarrow L(E)$ définie par $\Phi_T(P) = P(T)$ est un homomorphisme d'algèbres.

ii) Montrer qu'on a : $(P(T))^* = \overline{P}(T^*)$.

Supposons que T est hermitien et notons α et β respectivement sa borne inférieure et sa borne supérieure.

iii) Donner une condition suffisante sur P pour que l'opérateur $P(T)$ soit hermitien.

iv) On admet que le produit de deux opérateurs positifs permutables est positif (*cf.* exercice X. 5.6). Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est positif sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$, alors $P(T)$ est positif. En déduire que si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont tels que, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $P(x) \leq Q(x)$, alors $P(T) \leq Q(T)$ et que $|||P(T)||| \leq \sup_{x \in [\alpha,\beta]} |P(x)|$.

v) Montrer que Φ_T se prolonge en un homomorphisme continu de l'algèbre (de Banach) des fonctions continues sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ (avec la norme $|| \ ||_\infty$ de la convergence uniforme) dans l'algèbre $L(E)$.

vi) En déduire que si T est positif, il existe un opérateur hermitien positif D sur E tel que $D^2 = T$ (on dit que l'opérateur D est une *racine carrée* de T).

vii) En déduire aussi que si $\alpha > 0$, l'opérateur T est inversible.

5.6. Dans tout l'exercice $(E, \langle \ , \ \rangle)$ sera un espace de Hilbert complexe de norme $|| \ ||$, $L(E)$ l'algèbre de Banach des opérateurs bornés sur E muni de la norme habituelle $||| \ |||$; l'élément unité sera noté I. On notera $\mathcal{H}(E)$ la sous-algèbre (sur $\mathbb{R}$) de $L(E)$ formée des opérateurs hermitiens. On rappelle que $\mathcal{H}(E)$ est muni de l'ordre $T \leq S$ (on dira que T est *plus petit* que S ou que S est *plus grand* que T) si, et seulement si, l'opérateur $S - T$ est positif. On dira qu'une suite (T_n) dans $L(E)$ converge vers $T \in L(E)$ pour la :

– *topologie forte* si $\lim_{n\to+\infty} |||T_n - T||| = 0$;

– *topologie de la convergence intermédiaire* si, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)$ converge vers Tx pour la norme de E. On admet (et on peut le vérifier facilement) que, pour cette topologie, la multiplication $(T, S) \in L(E) \times L(E) \longrightarrow TS \in L(E)$ est séparément continue.

Soient T et S sont deux opérateurs positifs permutables. L'objet de cet exercice est de montrer que le produit TS est aussi positif. On peut évidemment supposer, sans perte de généralité, que la borne supérieure de S est égale à 1.

i) Soient T un opérateur positif et $U \in \mathcal{H}(E)$ permutable à T. On pose $S = U^2$. Montrer que TS est positif.

On définit une suite (S_n) dans $\mathcal{H}(E)$ en posant : $S_0 = S$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n - S_n^2$.

ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq S_n \leq I$. (Faire une récurrence sur n et utiliser l'inégalité, valable pour tout opérateur positif V et tout $x \in E$, $||Vx||^2 \leq |||V|||\langle Vx, x\rangle$.)

iii) Montrer que (S_n) tend vers 0 pour la topologie de la convergence intermédiaire. (Remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S = S_0^2 + \cdots + S_n^2 + S_{n+1}$.)

iv) Montrer que, pour la topologie de la convergence intermédiaire, les suites (Θ_n) avec $\Theta_n = \sum_{k=0}^{n} S_k^2$ et $(T\Theta_n)$ tendent respectivement vers S et TS.

v) En déduire que TS est positif.

CHAPITRE XI
Applications aux équations différentielles

Ce chapitre a pour but de donner une idée de la façon dont on peut appliquer des méthodes d'analyse fonctionnelle à la résolution d'équations différentielles. La section 1 est consacrée aux définitions principales et au théorème d'existence établi en usant du théorème du point fixe (*cf.* théorème 0. 2.2). Dans la section 2 on aborde sommairement les équations différentielles linéaires. Dans la section 3 on étudie, à titre d'exemple, le problème de Sturm-Liouville auquel on applique les méthodes spectrales développées dans les chapitres antérieurs. Le lecteur qui désire avoir plus de détails et de précision sur les équations différentielles pourrait consulter les références données à cet effet en bibliographie, par exemple [CCM2].

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\psi : J \longrightarrow \mathbb{E}$ une fonction où $\mathbb{E}$ est un espace normé de dimension finie. Si J est ouvert, la dérivabilité de ψ se définit de la manière habituelle. Si J est l'intervalle compact $[a, b]$, $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^r, si elle est C^r sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et si pour tout $\ell \in \{0, 1, \dots, r\}$ elle admet une dérivée $\ell^{\text{ème}}$, $\psi_d^{(\ell)}(a)$ à droite en a et une dérivée $\ell^{\text{ème}}$, $\psi_g^{(\ell)}(b)$ à gauche en b. Une telle fonction est toujours la restriction à J d'une fonction $\widetilde{\psi}$ de classe C^r sur $\mathbb{R}$ tout entier. Si $r \in \mathbb{N}$, il suffit de prendre

$$\widetilde{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } t \in J \\ \sum_{\ell=0}^{r} \frac{\psi_d^{(\ell)}(a)}{\ell!}(t-a)^\ell & \text{si } t < a \\ \sum_{\ell=0}^{r} \frac{\psi_g^{(\ell)}(b)}{\ell!}(t-b)^\ell & \text{si } t > b \end{cases}$$

De la même manière une fonction $\psi :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (respectivement $\psi : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$) est de classe C^r, si elle est la restriction d'une fonction $\widetilde{\psi}$ de classe C^r sur $]a, +\infty[$ (respectivement sur $]-\infty, b]$). Cette convention sera étendue au cas $r = +\infty$.

Ces précisions étant faites, dans les paragraphes 1 et 2 et sauf mention expresse du contraire, l'intervalle J sera quelconque. Les fonctions considérées seront supposées à valeurs réelles. Le cas complexe s'en déduit immédiatement.

1. Généralités sur les équations différentielles

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}^{p+1}$ où $\mathbb{E}$ est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Un point de J sera repéré par sa coordonnée t et un point $x \in \mathbb{E}$ par ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$.

1.1. Définition. *On appelle* **équation différentielle ordinaire** *d'ordre p sur Ω une équation du type*

$$F(t, x, x', \dots, x^{(p)}) = 0 \qquad \text{(XI.1)}$$

où $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ est une application continue.

Une *solution* de cette équation est une fonction p fois dérivable $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{E}$ (où J est un intervalle de $\mathbb{R}$) telle que pour tout $t \in J$ on ait

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(p)}(t)) = 0.$$

Le paramètre t repésente en général le temps ; cela vient du fait que beaucoup d'équations différentielles viennent de problèmes de la physique dans lesquels la fonction φ décrit les variations d'une certaine grandeur en fonction du temps t.

On suppose que l'équation (XI.1) peut être mise sous la forme *résolue* suivante

$$\frac{d^p x}{dt^p} = f(t, x, x', \dots, x^{(p-1)})$$

où f est une fonction continue. Si on pose $y = x'$ on ramène cette équation d'ordre p à l'équation d'ordre $p-1$ sous forme résolue

$$\frac{d^{p-1} x}{dt^{p-1}} = g(t, y, y', \dots, y^{(p-2)}).$$

L'itération de ce processus ramène donc toute équation d'ordre p à une équation d'ordre 1. Nous supposerons désormais $p = 1$ *i.e.* nous étudierons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

où $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ avec Ω ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$.

1.2. Exemples

i) Prenons f identiquement nulle. Alors l'équation différentielle est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ et toute fonction constante $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}$ en est une solution. Toutefois si on impose à x de prendre une valeur particulière x_0 à l'instant t_0, la solution devient unique.

ii) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue définie par $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$. Alors la fonction identiquement nulle $\varphi = 0$ est solution ; de même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_\lambda(t) = (t - \lambda)^3$ est une solution qui s'annule pour $t = \lambda$. Ainsi, sur cet exemple, même si on impose la condition $\varphi(\lambda) = 0$, la solution n'est pas unique : $\varphi = 0$ et φ_λ sont deux solutions s'annulant en λ !

Pour avoir une solution unique, il faut donc imposer $\varphi(t_0) = x_0$ qu'on appelle *condition initiale*, ensuite une autre hypothèse sur la fonction f.

1.3. Définition. *On appelle* **problème de Cauchy**, *toute équation différentielle ordinaire $x' = f(t, x)$ avec une condition initiale $x(t_0) = x_0$ où $(t_0, x_0) \in \Omega$.*

Ceci signifie qu'on impose au graphe de la solution de passer par le point (t_0, x_0). La solution du problème de Cauchy est donnée par le théorème qui suit qu'on peut attribuer au moins à A. Cauchy, S. Kowaleska et E. Picard. Pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$ et tous $\alpha > 0$ et $\eta > 0$, on notera $B = B(x_0, \eta)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon η et J_α l'intervalle ouvert $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

1.4. Théorème d'existence. *Soient* $(t_0, x_0) \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ *et* $\eta > 0$ *tels que l'adhérence de* $\Omega_0 = B \times J_\varepsilon$ *soit contenue dans* Ω. *Supposons* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ *lipschitzienne sur* Ω_0 *de constante* C. *Posons*

$$M = \sup_{(t,x)\in\Omega_0} |f(t,x)| \text{ et } \alpha = \inf\left(\varepsilon, \frac{\eta}{M}\right).$$

Alors le problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ *admet une solution* φ *sur l'intervalle fermé* $\overline{J}_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ *unique i.e. toute autre solution définie sur* $\overline{J}_\alpha$ *est égale à* φ.

Démonstration. Soit X l'ensemble $C^0(\overline{J}_\alpha, \overline{B})$ des fonctions continues $\overline{J}_\alpha \longrightarrow \overline{B}$ muni de la distance

$$\delta(\varphi, \psi) = \sup_{t\in J_\alpha} |\varphi(t) - \psi(t)|.$$

C'est un espace métrique complet. Soit $\varphi \in X$. Pour tout $t \in \overline{J}_\alpha$, posons

$$L(\varphi)(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds + x_0.$$

On a $|L(\varphi)(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds\right| \leq M\alpha \leq \eta$. Donc $L(\varphi) \in X$ et on a une application bien définie $L : \varphi \in X \longrightarrow L(\varphi) \in X$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit L^m la $m^{\text{ème}}$ itérée de L *i.e.* $L^0\varphi = \varphi$ et $L^m\varphi = L(L^{m-1}\varphi)$. Nous allons montrer qu'il existe $\kappa \in]0, 1[$ tel que

(XI.2) $$|L^m(\varphi) - L^m(\psi)| \leq \kappa\delta(\varphi, \psi)$$

pour m assez grand *i.e.* L^m est une application contractante de X dans lui-même. Montrons d'abord que pour tout $m \in \mathbb{N}$, tout $t \in \overline{J}_\alpha$ et toutes fonctions $\varphi, \psi \in X$ on a

(XI.3) $$|L^m(\varphi)(t) - L^m(\psi)(t)| \leq \frac{C^m|t - t_0|^m}{m!}\delta(\varphi, \psi).$$

Pour $m = 0$, cette inégalité se réduit à $|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \delta(\varphi, \psi)$ qui est vraie par définition même de la distance δ. Supposons (XI.3) vraie pour $k \leq m - 1$ et montrons qu'elle le reste pour $k = m$. On a

$$\begin{aligned}
|L^m(\varphi)(t) - L^m(\psi)(t)| &= |L(L^{m-1}(\varphi))(t) - L(L^{m-1}(\psi))(t)| \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} \{f(s, L^{m-1}(\varphi)(s)) - f(s, L^{m-1}(\psi)(s))\} \, ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \left| f(s, L^{m-1}(\varphi)(s)) - f(s, L^{m-1}(\psi)(s)) \right| ds \\
&\leq C \int_{t_0}^{t} |L^{m-1}(\varphi)(t) - L^{m-1}(\psi)(t)| ds \\
&\leq C \left| \int_{t_0}^{t} \frac{C^{m-1}(t_0 - s)^{m-1}}{(m-1)!} \delta(\varphi, \psi) ds \right| \\
&\leq \frac{C^m |t - t_0|^m}{m!} \delta(\varphi, \psi).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne $\delta(L^m(\varphi), L^m(\psi)) \leq \frac{C^m \alpha^m}{m!} \delta(\varphi, \psi)$. On choisit m suffisamment grand de telle sorte que $\frac{C^m \alpha^m}{m!} < 1$ et on prend κ égal à $\frac{C^m \alpha^m}{m!}$. On vient donc de montrer que pour ce m l'application $L^m : X \longrightarrow X$ est contractante. D'après le théorème O. 2.2 il existe un unique élément $\varphi \in X$ telle que $L(\varphi) = \varphi$ *i.e.* φ vérifie l'équation

$$\text{(XI.4)} \qquad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds.$$

L'égalité (XI.4) montre que φ est dérivable et vérifie l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ ainsi que la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$ *i.e.* φ est solution du problème de Cauchy. □

La proposition qui suit donne des solutions globales dans le cas où l'ouvert Ω est de la forme $[a, b] \times \mathbb{E}$. Sa démonstration est similaire à celle du théorème XI. 1.4.

1.5. Proposition. *Supposons $f : [a, b] \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ lipschitzienne. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{E}$, il existe une unique fonction dérivable $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{E}$ telle que $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ et $\varphi(t_0) = x_0$.*

Autant, sous certaines conditions, on sait montrer l'existence et l'unicité de la solution au problème de Cauchy autant on ne sait pas toujours la donner explicitement. A l'heure actuelle, il n'existe aucune méthode permettant d'intégrer de façon générale les équations différentielles. Dans beaucoup de cas (loin d'être la totalité), on sait résoudre avec une méthode particulière, bien propre à la situation, et toutes ces méthodes peuvent différer totalement les unes des autres.

2. Équations linéaires

Elles constituent une classe importante d'équations différentielles. Dans beaucoup de situations on sait en donner des solutions explicites.

On appelle *système différentiel linéaire* de n équations à n inconnues un système du type

$$x'_j(t) = b_j(t) + \sum_{i=1}^{n} a_j^i x'_i(t) \quad j = 1, \dots, n \tag{XI.5}$$

où a_j^i et b_j sont des fonctions continues sur un intervalle J. Si $b_i = 0$ pour tout i on dira que le système est *homogène* : sinon on dira qu'il est *non homogène* (ou *avec second membre*). Si on pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1^1(t) & & a_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1(t) & & a_n^n(t) \end{pmatrix} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

on peut écrire le système sous la forme matricielle suivante

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{où} \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}.$$

2.1. Théorème. *Pour tout $(t_0, X_0) \in J \times \mathbb{E}$, le problème de Cauchy linéaire*

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{avec} \quad X(t_0) = X_0$$

admet une solution $\Phi : t \in J \longrightarrow (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \mathbb{E}$ unique i.e. toute autre solution définie sur J est égale à Φ.

Démonstration. La démonstration de ce théorème se base sur un procédé d'approximations successives similaire à celui utilisé dans celle du théorème XI. 1.4. On définit la suite de fonctions continues $\varphi_n : J \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = X_0 \\ \varphi_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^t \{A(s)(\varphi_{n-1}(s)) + B(s)\}\, ds \end{cases}$$

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de J. Nous allons montrer que la suite φ_n converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction continue φ, solution du problème. Pour tout $s \in [a, b]$ on note $|||A(s)|||$ la norme de l'application linéaire $A(s) : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$. On pose

$$\begin{cases} \kappa = \sup_{s \in [a,b]} |||A(s)||| \\ C = \sup_{s \in [a,b]} |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| \end{cases}$$

Pour tout $t \in [a, b]$ on a

$$\begin{aligned} |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)(\varphi_1(s) - \varphi_0(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |A(s)(\varphi_1(s) - \varphi_0(s))|\, ds \\ &\leq \kappa C |t - t_0|. \end{aligned}$$

En itérant ce processus on établit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante, valable pour tout $t \in [a,b]$

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \le \frac{\kappa^n C}{n!}|t - t_0|^n.$$

D'où

$$\sup_{t\in[a,b]} |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \le \frac{(\kappa(b-a))^n C}{n!}.$$

Comme la série de terme général $\frac{(\kappa(b-a))^n C}{n!}$ converge (sa limite est $Ce^{\kappa(b-a)}$), la suite de fonctions $\varphi_n = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \ldots + (\varphi_n - \varphi_{n-1})$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction continue. A priori cette fonction dépend de l'intervalle $[a,b]$; mais comme J est union d'intervalles compacts, la suite (φ_n) converge uniformément sur tout compact de J vers une fonction continue $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}$. De façon évidente φ vérifie

$$\varphi(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \{A(s)\varphi(s) + B(s)\}\, ds.$$

Cette relation montre que φ est de classe C^1 et est solution du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec la condition initiale $\varphi(t_0) = X_0$.

Reste à établir l'unicité de φ. Soit $\psi : J \longrightarrow \mathbb{E}$ une autre solution du problème de Cauchy $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec $\psi(t_0) = X_0$. Alors un calcul élémentaire permet de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout intervalle compact $[a,b] \subset J$, on a l'inégalité

$$\sup_{t\in[a,b]} |\psi(t) - \varphi_{n+1}(t)| \le \frac{(\kappa(b-a))^n \alpha}{n!}$$

où α est le maximum de la fonction $|\psi(t) - \varphi_1(t)|$ sur $[a,b]$. Comme la suite numérique $\frac{(\kappa(b-a))^n \alpha}{n!}$ tend vers 0, la suite de fonctions φ_n converge uniformément vers ψ et ceci sur tout intervalle compact $[a,b] \subset J$. Donc $\psi = \varphi$; ce qui établit l'unicité de la solution φ. □

Les solutions $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ sont globales *i.e.* sont définies sur tout l'intervalle J. Nous allons donner quelques-unes de leurs propriétés principales.

2.2. Proposition. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions du système différentiel homogène $X'(t) = A(t)X(t)$ associé à* (XI.5) *est un espace vectoriel de dimension finie égale à n.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{S}$ soit un espace vectoriel se vérifie facilement. Soit $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{S}$ s'annulant pour un $t_0 \in J$. Comme 0 est aussi une solution s'annulant en t_0, par unicité on a $\Phi = 0$. Soit $t_0 \in J$ et notons $e : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $e(\Phi) = \Phi(t_0)$. D'après ce qui précède e est injective. La surjectivité est assurée par le théorème XI. 2.1 : pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une solution Φ telle que $\Phi(t_0) = X_0$ *i.e.* on a $e(\Phi) = X_0$. □

2.3. Corollaire. *L'ensemble des solutions du système linéaire (non homogène) $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ est un sous-espace affine de dimension n de l'espace vectoriel $C^1(J,\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 sur J.*

L'espace vectoriel $\mathcal{S}$ paramètre l'ensemble des solutions du système (XI.5) : elles sont toutes obtenues en rajoutant les éléments de $\mathcal{S}$ à une solution particulière de (XI.5).

2.4. Equation linéaire d'ordre n

C'est une équation de la forme

$$\text{(XI.6)} \qquad \frac{d^n x}{dt^n} = a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x + b(t)$$

où a_i, $i = 1, \ldots, n$ et b sont des fonctions ontinues sur J. Si on pose

$$y_1 = x, \quad y_2 = x', \quad \ldots, y_n = x^{(n-1)}$$

Elle se transforme en le système différentiel linéaire

$$\text{(XI.7)} \qquad Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & & a_1(t) \end{pmatrix}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Les deux équations (XI.6) et (XI.7) sont équivalentes : toute solution $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ de (XI.6) donne la solution $(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$ de (XI.7) ; inversement si $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ est une solution de (XI.7), $\varphi_1(t)$ est clairement une solution de (XI.6).

On voit alors que l'ensemble des solutions de l'équation linéaire d'ordre n sur un intervalle J est un sous-espace affine (vectoriel si $b = 0$) de dimension n de l'espace vectoriel $C^n(J,\mathbb{R})$ des fonction $J \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n.

3. Problème de Sturm-Liouville

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et p, q, $\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues avec $p, \rho > 0$ et p de classe C^1. On appelle *équation de Sturm-Liouville* toute équation différentielle du second ordre de la forme

(XI.8) $$(pu')' + (\lambda\rho - q)u = 0$$

où λ est un paramètre réel. Pour des raisons de simplicité, nous allons restreindre l'étude à un intervalle fermé borné $J = [a, b]$ (avec $a < b$) bien que la théorie ne se limite nullement à ce cadre. On imposera aux solutions u de l'équation (XI.8) de vérifier des conditions aux limites dites *conditions auto-adjointes.* Voici trois exemples :

(XI.9) $$\begin{cases} u(a) = u(b) = 0 & \text{(i)} \\ u'(a) = u'(b) = 0 & \text{(ii)} \\ u(a) = u(b) \text{ et } u'(a) = u'(b) \text{ si } p(a) = p(b) & \text{(iii)} \end{cases}$$

Ce qu'on appellera dorénavant *conditions auto-adjointes*, c'est l'un des blocs de conditions aux limites (XI.9) : le (i), le (ii) ou le (iii).

3.1. Définition. *On appelle* **problème de Sturm-Liouville,** *la donnée de l'équation* (XI.8) *et l'une des conditions auto-adjointes* (XI.9) (i), (XI.9) (ii) *ou* (XI.9) (iii). *Une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une solution u non triviale est appelée valeur* **propre du problème.** *On dira alors que u est une* **fonction propre** *associée à la valeur propre λ.*

Nous travaillerons sur l'espace vectoriel $E = C^0([a, b])$ des fonctions continues $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. C'est un espace Banach pour la norme

$$||u||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |u(x)|.$$

On peut aussi le munir du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)\rho(x)dx$ qui en fait un espace préhilbertien ; la norme associée sera notée $|| \ ||$.

3.2. Proposition. *Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres du problème de Sturm-Liouville associées respectivement aux fonctions propres u_1 et u_2. Alors u_1 et u_2 sont orthogonales.*

Démonstration. Nous avons

$$\begin{cases} (pu_1')' + (\lambda_1\rho - q)u_1 = 0 \\ (pu_2')' + (\lambda_2\rho - q)u_u = 0 \end{cases}$$

En multipliant la première relation par u_2, la deuxième par u_1 et en soustrayant membre à membre, on obtient $p\,[u_2u_1'' - u_1u_2''] + p'\,[u_2u_1' - u_1u_2'] = (\lambda_1 - \lambda_2)\rho u_1u_2$ *i.e.*

$$[p(u_2u_1' - u_1u_2')]' = (\lambda_1 - \lambda_2)\rho u_1u_2.$$

On intègre les deux membres sur $[a, b]$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b u_1(x)u_2(x)\rho(x)dx = [p(x)(u_2(x)u_1'(x) - u_1(x)u_2'(x))]_a^b.$$

D'où $(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b u_1(x)u_2(x)\rho(x)dx = 0$ tenant compte des conditions (XI.9). □

Notons F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions de classe C^2 ; il n'est pas fermé (pour aucune des normes $|| \ ||$ et $|| \ ||_\infty$). Considérons le problème de Sturm-Liouville

$$(p(x)u')' + (\lambda\rho + q)u = 0$$

avec l'une des conditions (XI.9). On suppose $p, \rho > 0$ et p de classe C^1. En posant $p'(x) = r(x)$ et $\rho(x) = 1$, l'équation devient

$$pu'' + ru' + qu = \lambda u.$$

(On a remplacé $-\lambda$ par λ.) Soit $D : F \longrightarrow E$ l'application définie par

(XI.10) $$Du = pu'' + ru' + qu.$$

Elle est linéaire mais non continue pour la norme $|| \ ||_\infty$ (par exemple sur $[0,1]$ si $q = 0$ et $p = \rho = 1$, la suite $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$ converge uniformément vers 0 alors que (Du_n) n'est même pas bornée). C'est un *opérateur non borné* et on ne peut pas lui appliquer directement les techniques développées dans les chapitres IX et X.

3.3. Remarques

i) Pour tout $v \in E$, l'équation $Du = v$ a une solution (*cf.* théorème XI. 2.1).

ii) Si V est un supplémentaire du noyau N de D dans F, alors la restriction de D à V est un isomorphisme sur E.

iii) Les conditions auto-adjointes imposent à D d'être *formellement auto-adjoint* pour le produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ *i.e.* pour tous $u, v \in F$ on a $\langle Du, v\rangle = \langle u, Dv\rangle$; la vérification est un peu longue mais étant facile, elle est laissée au lecteur.

Soit maintemant V l'un des sous-espaces $V_1 = \{u \in F : u(a) = u(b) = 0\}$, $V_2 = \{u \in F : u'(a) = u'(b) = 0\}$ ou $V_3 = \{u \in F : u(a) = u(b) \text{ et } u'(a) = u'(b)\}$ si p vérifie la condition $p(a) = p(b)$. C'est un sous-espace fermé de F de codimension 2 ayant N comme supplémentaire (topologique).

3.4. Lemme. *Soit* $\eta \geq \sup(q(x)) + 1$ *et* $m = \inf p(x)$. *Notons* I *l'opérateur identité. Alors*

i) pour toute fonction $u \in V$ *on a* $\langle \eta u - Du, u\rangle \geq m||u'||^2 + ||u||^2$ *;*

ii) l'opérateur $D - \eta I : V \longrightarrow E$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Démonstration. i) Soit $u \in V$; on a

$$\begin{aligned}\langle(\eta I - D)u, u\rangle &= -\int_a^b (pu')'udx + \int_a^b (\eta - q)u^2dx \\ &= [-pu'u]_a^b + \int_a^b p(u')^2dx + \int_a^b (\eta - q)u^2dx \\ &\geq m||u'||^2 + ||u||^2\end{aligned}$$

le terme $[-pu'u]_a^b$ étant nul à cause des conditions auto-adjointes imposées à u.

ii) D'après i), $u = 0$ si $(\eta I - D)u = 0$. Donc l'application linéaire $D - \eta I$ est injective. Comme l'équation différentielle $Du - \eta u = w$ admet toujours une solution dans V, l'application linéaire $D - \eta I : F \longrightarrow E$ est surjective. D'autre part, on sait (*cf.* XI. 2.4) que le sous-espace $N_\eta = \{u \in C^2 : Du = \eta u\}$ est de dimension 2. Comme V est de codimension 2 et $V \cap N_\eta = \{0\}$, pour toute fonction $w \in E$, il existe $u \in V$ telle que $Du - \eta u = w$ *i.e.* l'application $D - \eta I : V \longrightarrow E$ est surjective. Ce qui termine la démonstration. □

D'après le lemme XI. 3.4. l'application linéaire $D - \eta I : V \longrightarrow E$ est inversible. Soit $S : E \longrightarrow V$ son inverse.

3.5. Lemme. *On suppose les conditions du lemme* XI. 3.4. *remplies. Alors l'application linéaire* $S : (E, || \ ||) \longrightarrow (E, || \ ||_\infty)$ *est un opérateur compact.*

Démonstration. Soit (w_n) une suite dans la boule unité de $(E, || \ ||)$ et (u_n) la suite dans V telle que $u_n = Sw_n$ *i.e.* $w_n = Du_n - \eta u_n$. On va montrer que (u_n) admet une sous-suite convergente ; pour cela il suffit de montrer, en vertu du théorème d'Ascoli, que la suite (u_n) est équicontinue et bornée pour la norme $|| \ ||_\infty$.

Par le point i) du lemme XI. 3.4 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}m||u_n'||^2 + ||u_n||^2 &\leq |\langle(D - \eta I)u_n, u_n\rangle| \\ &\leq ||w_n|| \cdot ||u_n||.\end{aligned}$$

Par suite $||u_n||^2 \leq ||w_n|| \cdot ||u_n||$, donc $||u_n|| \leq 1$ puisque $||w_n|| \leq 1$. De même on montre que $||u_n'|| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Soient $x, y \in [a, b]$; on a

$$\begin{aligned}|u_n(x) - u_n(y)| &= \left|\int_x^y u_n'(t)dt\right| \\ &\leq \int_x^y |u_n'(t)|dt \\ &\leq \sqrt{\int_x^y |u_n'(t)|^2dt}\sqrt{\int_x^y dt} \\ &\leq ||u_n'|| \cdot \sqrt{|x - y|}.\end{aligned}$$

Cela donne finalement l'inégalité

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{|x - y|} \qquad \text{(XI.11)}$$

qui montre bien que la suite (u_n) est équicontinue. Reste à montrer qu'elle est bornée pour la norme $|| \ ||_\infty$.

Soit x_n un point de $[a,b]$ en lequel la fonction $|u_n|$ atteint son minimum δ. On a

$$||u_n|| = \sqrt{\int_a^b |u_n(x)|^2 dt} \geq \delta \sqrt{\int_a^b dt} \geq \delta\sqrt{b-a}.$$

D'où

$$\delta \leq \frac{1}{\sqrt{b-a}}.$$

De cette inégalité et de (XI.11) on tire l'inégalité qui suit, valable pour tout $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq |u_n(x_n)| + |u_n(x) - u_n(x_n)| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{b-a}} + \frac{1}{m}\sqrt{b-a} \end{aligned}$$

qui montre clairement que la suite (u_n) est bornée pour $|| \ ||_\infty$. □

Soient $w_1, w_2 \in E$ et $u_1, u_2 \in V$ tels que $Du_1 - \eta u_1 = w_1$ et $Du_2 - \eta u_2 = w_2$ ou r encore $u_1 = Sw_1$ et $u_2 = Sw_2$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle Sw_1, w_2 \rangle &= \langle u_1, Du_2 - \eta u_2 \rangle \\ &= \langle Du_1 - \eta u_1, u_2 \rangle \\ &= \langle w_1, Sw_2 \rangle \end{aligned}$$

L'opérateur S est donc *symétrique* (*i.e.* vérifie $\langle Sw_1, w_2 \rangle = \langle w_1, Sw_2 \rangle$) sur l'espace préhilbertien $(E, \langle \ , \ \rangle)$. Il se prolonge au complété $\widehat{E}$ en un opérateur compact hermitien $\widehat{S}$. Son spectre est donc une partie $\{0, \mu_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ de $\mathbb{R}$ dénombrable compacte ayant 0 comme seul point d'accumuation. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, μ_n est une valeur propre de S ; notons e_n un vecteur propre unitaire associé à μ_n.

3.6. Théorème. *On se donne des fonctions continues $p, q : J \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $p > 0$ de classe C^1 et on considère le problème de Sturm-Liouville suivant : une équation différentielle $(pu')' + (\lambda + q)u = 0$ et l'une des conditions auto-adjointes* (XI.9). *Alors*

i) les valeurs propres du problème forment une suite (λ_n), $n \in \mathbb{N}^*$ de nombres réels tendant vers $+\infty$;

ii) pour tout n, e_n est une fonction propre, c'est-à-dire solution de l'équation $(pu')' + (\lambda_n + q)u = 0$ et (e_n) est une base orthonormale de E ;

iii) toute fonction $u \in V$ se développe en la série $u = \sum_{n=1}^\infty \langle u, e_n \rangle e_n$ uniformément convergente sur l'intervalle $[a,b]$.

Démonstration. i) Les valeurs propres λ_n du problème de Sturm-Liouville sont les opposées respectives de celles (qu'on notera λ'_n) de l'opérateur D. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on a $Se_n = \mu_n e_n$. D'où $De_n = \left(\eta + \frac{1}{\mu_n}\right) e_n$. Donc $\lambda'_n = \eta + \frac{1}{\mu_n}$ est la valeur propre

de D associée au vecteur propre e_n. L'inégalité i) du lemme XI. 3.4 montre que $\mu_n < 0$ et donc $\lambda_n = -\lambda'_n = -\left(\eta + \frac{1}{\mu_n}\right)$ tend vers $+\infty$.

ii) Le fait que e_n soit une fonction propre est déjà établi au point i). Pour montrer que (e_n), $n \in \mathbb{N}^*$ est une base orthonormale de E il suffit d'appliquer le corollaire X. 3.3 et observer la densité de V dans E et le fait que $V = S(E)$ (puisque $S : E \longrightarrow V$ est un isomorphisme).

iii) Le développement de $u \in V$ en série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n$$

et sa convergence uniforme sur $[a, b]$ (donc pour la norme $\|\ \|_\infty$ qui est plus fine que $\|\ \|$) découle du fait que u est dans l'image de S et du théorème X. 3.4. □

Le théorème XI. 3.6. transforme le problème de Sturm-Liouville en un problème de théorie spectrale. Cette démarche est bien entendu intéressante quand on sait calculer effectivement le spectre, ce qui est souvent un problème hautement non trivial. On arrive toutefois à le faire sur beaucoup d'exemples quand on dispose de bonnes hypothèses (*cf.* exercice XI. 4.3).

4. Exercices

4.1. Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach et $A \in L(E)$ ($L(E)$ est l'espace vectoriel des opérateurs bornés sur E muni de la norme habituelle $|||\ |||$). On définit A^n sur tout vecteur $x \in E$ par $A^0(x) = x$ et $A^n(x) = A(A^{n-1}(x))$ si $n \geq 1$.

i) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge vers un élément de $L(E)$ qu'on note e^A et qu'on appelle *exponentielle* de A.

ii) Montrer que, si A et B commutent, on a $e^{A+B} = e^A e^B$. En déduire que pour tout $A \in L(E)$, l'opérateur e^A est inversible ; calculer son inverse.

4.2. Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n. On cherche à résoudre le système différentiel

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B(t)$$

où $B : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue sur l'intervalle J.

i) On se donne $(t_0, X_0) \in J \times \mathbb{R}^n$. Construire la suite (φ_n) utilisée dans la démonstration du théorème XI. 2.1 et donner la solution $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ du système différentiel linéaire associé avec la condition initiale $\varphi(t_0) = X_0$.

ii) En écrivant la fonction φ sous la forme $\varphi(t) = e^{tA}(C(t))$ où $C : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1, trouver une solution particulière du système différentiel

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B(t).$$

Cette façon de chercher une solution particulière du système non homogène s'appelle méthode de la *variation de la constante* (C qui était a priori une constante devient une fonction de $t \in J$).

iii) On prend $n = 1$; ainsi A est réduite à un réel a et $B(t)$ est simplement une fonction continue $b : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $x'(t) = ax(t) + b(t)$.

4.3. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres associés du problème de Sturm-Liouville sur l'intervalle $[0, \pi]$

$$u'' + \lambda u = 0 \quad \text{avec} \quad u(0) = u(\pi) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.4. Une corde est attachée à ses deux extrémités qu'on peut considérer comme celles d'un segment $[a, b]$ de la droite réelle. A l'instant $t_0 = 0$, on suppose que cette corde est le graphe (relativement à un repère orthonormé) d'une fonction continue f sur $[a, b]$ et à valeurs réelles. Soumise à des forces s'exerçant verticalement, elle subit des vibrations régies par l'équation différentielle (avec des conditions initiales et des conditions aux limites)

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\rho(x)}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y(a,t) = y(b,t) = 0 & \text{si } t \geq 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{si } a \leq x \leq b \\ y(x,0) = f(x) & \text{si } a \leq x \leq b \end{cases}$$

où $\rho : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction continue représentant au point d'abscisse x la *densité massique linéaire* de la corde et T (qu'on suppose constante) est la *tension* de la corde. L'équation (1) est appelée *équation de la corde vibrante* ou *équation des ondes à une dimension.* On va chercher une solution de la forme $y(x,t) = u(x)v(t)$.

i) Montrer que les fonctions $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ sont solutions respectives des deux problèmes de Sturm-Liouville

$$(2) \qquad u''(x) + \lambda\rho(x)u(x) = 0 \quad \text{avec} \quad u(a) = u(b) = 0$$

et

$$(3) \qquad v''(t) + \lambda T v(t) = 0 \quad \text{avec} \quad v'(0) = 0.$$

Soient $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ les valeurs propres du problème (2) et $u_0, \ldots, u_n, \ldots$ des vecteurs propres associés (formant un système orthonormal).

ii) Montrer que les fonctions $y_n(x,t) = u_n(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n T}t\right)$ sont solutions de l'équation (1) et vérifient les deux premières conditions initiales.

iii) On suppose $a = 0$, $b = \pi$, ρ constante égale à 1 et f de classe C^∞ et que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, la dérivée $\ell^{\text{ème}}$ à gauche $f_g^{(\ell)}(\pi)$ est égale à la dérivée $\ell^{\text{ème}}$ à droite $f_d^{(\ell)}(0)$. On pose $\alpha_n = \int_0^\pi f(x)u_n(2x)dx$ et pour $p \in \mathbb{N}$

$$S_p(x,t) = \sum_{n=0}^{p} \alpha_n u_n(2x)\cos\left(2\sqrt{\lambda_n T}t\right).$$

Montrer que la suite de fonctions (S_p) converge uniformément avec toutes ses dérivées vers une fonction $y(x,t)$ de classe C^∞, solution de l'équation de la corde vibrante vérifiant toutes les conditions imposées.

APPENDICE
Axiome du choix et lemme de Zorn

Ces compléments contiennent quelques définitions et énoncés sur l'axiome du choix et le lemme de Zorn que nous avons utilisés dans certaines démonstrations. Pour plus de détails le lecteur peut consulter [CCM1].

1. Axiome du choix

Soient I un ensemble et $(E_i)_{\in I}$ une famille d'ensembles tous non vides indexée par I. Si I est dénombrable, on peut l'ordonner comme suit $\{i_0, i_1, i_2, i_3, \ldots\}$ et même supposer qu'il est "égal" à $\mathbb{N}$ si on ne s'intéresse à I que du point de vue ensembliste. Il est alors toujours possible de *choisir un et un seul élément* x_i dans chacun des E_i. Pour cela il suffit de choisir x_0, ensuite x_1, x_2... Quand I n'est plus dénombrable, on ne peut plus procéder de cette façon ; on fait alors appel à l'axiome du choix.

1.1. Enoncé de l'axiome. *Le produit cartésien $\prod_{i\in I} E_i$ est non vide. Ceci signifie qu'il contient au moins un élément $(x_i)_{i\in I}$ avec $x_i \in E_i$.*

1.2. Enoncé équivalent. *Dans chaque ensemble E_i, on peut choisir un et un seul élément x_i.*

Cet axiome sert à montrer l'existence de beaucoup d'objets en Mathématiques, par exemple l'existence d'un *ensemble non mesurable* pour la tribu borélienne de la droite réelle $\mathbb{R}$.

2. Lemme de Zorn

Soit E un ensemble. Une *relation binaire* sur E est la donnée d'une partie $\mathcal{R}$ du produit cartésien $E \times E$. Si A est une partie de E alors $\mathcal{R}$ induit une relation binaire $\mathcal{R}_A$ sur A ; elle est définie en prenant l'intersection de $\mathcal{R}$ avec $A \times A$.

2.1. Définition. *On dira que $\mathcal{R}$ est :*

(1) ***réflexive****, si, pour tout $x \in E$, $x \,\mathcal{R}\, x$;*

(2) ***symétrique****, si $x \,\mathcal{R}\, y \Longrightarrow y \,\mathcal{R}\, x$;*

(3) ***transitive****, si $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z$ impliquent $x \,\mathcal{R}\, z$;*

(4) ***antisymétrique*** *si $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, x$ impliquent $x = y$.*

2.2. Définition. *On dira que $\mathcal{R}$ est une*

(1') ***relation d'équivalence****, si elle est réflexive, symétrique et transitive ;*

(2') ***relation d'ordre****, si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Quand $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E on la notera en général $\leq$ et on dira que $(E, \leq)$ est un *ensemble ordonné*. Quand deux éléments x et y sont "liés" par une relation d'ordre $\leq$, on dit qu'ils sont *comparables i.e.* on a : soit $x \leq y$, soit $y \leq x$. On dira que $\leq$ est un *ordre total* sur E si pour tous $x, y \in E$ on a : $x \leq y$ ou $y \leq x$. On dira qu'une partie A de E est *totalement ordonnée* si la relation d'ordre induite sur A est un ordre total.

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E. On dira que

(1) $c \in E$ est un *majorant* de A si $a \leq c$ pour tout $a \in A$;

(2) $b \in E$ est une *borne supérieure* de A si $a \leq b$ pour tout $a \in A$ et si $b \leq c$ pour tout c majorant de A ; autrement dit b est le plus petit des majorants de A.

2.3. Remarque. Si A admet une borne supérieure $b \in E$, alors A est majorée. La réciproque est fausse. En effet soit $E = \mathbb{R}_-^* \cup \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ la partie de $\mathbb{R}$ munie de l'ordre induit. Alors $A = \mathbb{R}_-^*$ est majorée mais n'a pas de borne supérieure (la définition exige que cette borne soit dans E, ce qui n'est pas le cas pour cet exemple).

2.4. Définition. *Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble ordonné.*

(1) On dira que $m \in E$ *est un élément* **maximal** *de* E*, s'il n'existe pas d'élément* $a \in E$, $a \neq m$ *tel que* $m \leq a$.

(2) On dira que E *est* **inductif** *si toute partie totalement ordonnée de* E *possède une borne supérieure.*

L'intérêt de tels ensembles est donné par le

2.5. Lemme de Zorn. *Tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal.*

Comme on l'a vu à plusieurs reprises ce lemme est d'une importance capitale (il a servi par exemple dans les démonstrations du théorème de Hahn-Banach aussi bien pour la forme analytique que géométrique et pour l'existence des bases hilbertiennes).

2.6. Exemples

1) – Le corps $\mathbb{R}$ des réels est totalement ordonné par $\leq$: si on prend deux réels x et y alors on a $x \leq y$ ou bien $y \leq x$.

2) – Considérons sur $\mathbb{R}^n$ la relation binaire : $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n)$ si, et seulement si, $x_i \leq y_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Il est facile de voir que $\leq$ est une relation d'ordre (qui n'est pas total si $n \geq 2$) sur $\mathbb{R}^n$.

Supposons $n = 2$. Alors toutes les *sections* $E_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x = \text{constante}\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : y = \text{constante}\}$ sont des parties totalement ordonnées de $(\mathbb{R}^2, \leq)$.

3) – L'*ordre lexicographique* sur $\mathbb{R}^n$ est défini dela façon suivante : $(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n)$ si $x_1 \leq y_1$ sinon $x_2 \leq y_2$ sinon etc. C'est un ordre total. C'est l'ordre suivant lequel sont rangés les mots dans un dictionnaire.

4) – On sait que tout idéal de l'anneau $\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{Z}$. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble de tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ muni de la relation d'ordre (non total) $I \leq I'$ si, et seulement si, $I \subset I'$. Ceci est encore équivalent à dire : si $I = a\mathbb{Z}$ et $I' = a'\mathbb{Z}$ alors $I \leq I'$ si, et seulement si, a est un multiple de a'. Il est alors facile de voir que *tout idéal maximal est de la forme* $a\mathbb{Z}$ *avec* a *premier.*

Sur cet exemple on voit en particulier qu'il peut exister plusieurs éléments maximaux sur un ensemble ordonné.

Compléments 1
Calcul de volumes

On rappelle que la boule $\mathbb{B}^n(R)$ (pour $n \geq 1$) et la sphère $\mathbb{S}^n(R)$ (pour $n \geq 0$) de rayon $R \geq 0$ sont respectivement les parties de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ définies par

$$\mathbb{B}^n(R) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq R^2 \right\}$$

et

$$\mathbb{S}^n(R) = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = R^2 \right\}.$$

Le *volume* d'une partie X qu'on notera $\mathrm{Vol}(X)$ sera la mesure de cette partie ; par exemple

– pour $n = 0$, $\mathbb{S}^0(R)$ est réduite à l'ensemble $\{-R, +R\}$; on conviendra que la mesure qu'elle supporte sera $\delta_{-R} + \delta_{+R}$ et donc : $\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^0(R)) = 2$;

– pour $n = 1$, $\mathbb{B}^1(R)$ est le segment $[-R, +R]$ dont le volume n'est rien d'autre que sa longueur au sens habituel $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^1(R)) = 2R$; $\mathbb{S}^1(R)$ est le cercle de rayon R dont le volume est le périmètre qui est égal à $2\pi R$;

– pour $n = 2$, $\mathbb{B}^2(R)$ est le disque de rayon R, son volume est égal à son aire habituelle qui est πR^2 ; $\mathbb{S}^2(R)$ est la sphère de rayon R, elle a pour volume son aire habituelle $4\pi R^2$.

Nous allons donner des formules valables pour tout $n \geq 1$ et permettant de calculer les volumes respectifs de $\mathbb{B}^n(R)$ et $\mathbb{S}^n(R)$.

1. Volume des boules

La boule $\mathbb{B}^n(R)$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ et son volume n'est rien d'autre que l'intégrale de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{B}^n(R)}$. Les calculs ne seront pas immédiats ; il faut les mener par récurrence.

On sait que pour $n = 1$ on a $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^1(R)) = 2R$. Nous allons traiter le

1.1. Cas $n = 2$

Il s'agit de calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{B}^2(R)} dxdy.$$

Nous le ferons en utilisant le théorème de Fubini. On fixe $x \in [-R, +R]$ et on note B_x la section de $\mathbb{B}^2(R)$ suivant x qui n'est rien d'autre que l'intervalle $[-b_x, +b_x]$ où $b_x = \sqrt{R^2 - x^2}$.

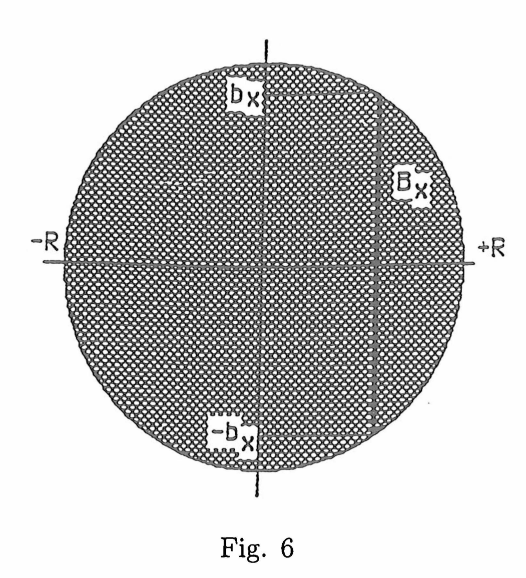


Fig. 6

On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^2(R)) &= \int_{-R}^{+R}\left(\int_{B_x} dy\right)dx\\ &= \int_{-R}^{+R}\left(\int_{-b_x}^{+b_x} dy\right)dx\\ &= \int_{-R}^{+R} 2\sqrt{R^2-x^2}dx.\end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on fera un changement de variable en posant $x = R\sin\theta$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^2(R)) &= \int_{-R}^{+R} 2\sqrt{R^2-x^2}dx\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R^2\cos^2\theta d\theta\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\left(\cos(2\theta)+1\right)d\theta\\ &= R^2\left[\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\\ &= \pi R^2.\end{aligned}$$

1.2. Cas $n = 3$

Le point courant (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ sera désigné par (x, y) où $x = x_1$ et $y = (x_2, x_3)$ via l'identification $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Pour $x \in [-R, +R]$, B_x sera toujours la

section de $\mathbb{B}^3(R)$ suivant x. La partie B_x de $\mathbb{R}^2$ est un disque de rayon $\sqrt{R^2 - x^2}$ dont l'aire est égale à $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.
On a comme précédemment

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^3(R)) &= \int_{-R}^{+R}\left(\int_{B_x} dy\right)dx\\ &= \int_{-R}^{+R} \pi\left(R^2 - x^2\right)dx\\ &= \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{+R}\\ &= \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

La même démarche donne pour $n = 4$

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^4(R)) = \frac{\pi^2}{2}R^4.$$

On remarque que les calculs font apparaître des expressions du type

(1) $$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^{2k}(R)) = \frac{\pi^k}{k!}R^{2k}$$

et

(2) $$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^{2k+1}(R)) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k+1)}R^{2k+1}$$

On va montrer que ces formules donnent effectivement le volume de la boule de rayon R de $\mathbb{R}^n$. On a déjà vu que c'était vrai pour $n = 1, 2, 3$ et 4. Nous allons supposer que si on a la formule

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n(R)) = \frac{\pi^k}{k!}R^{2k}$$

pour $n = 2k$, alors on a la formule

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n(R)) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k+1)}R^{2k+1}$$

pour $n = 2k + 1$. Le cas où on suppose d'abord la formule vraie pour $n = 2k + 1$ se traite de la même manière.

On veut donc calculer le volume de la boule $\mathbb{B}^{2k+1}(R)$ connaissant celui de $\mathbb{B}^{2k}(R)$. Pour simplifier les notations on posera $x = x_1$ et $y = (x_2, \ldots, x_{2k+1})$ pour un point courant $x = (x_1, \ldots, x_{2k+1})$ de $\mathbb{R}^{2k+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2k}$; B_x sera toujours la section de $\mathbb{B}^{2k+1}(R)$ suivant $x \in [-R, +R]$ (qui est une boule de rayon $\sqrt{R^2 - x^2}$ dans $\mathbb{R}^{2k}$ et $dy = dx_2 \ldots dx_{2k+1}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2k}$ vu comme le sous-espace de $\mathbb{R}^{2k+1}$ défini par l'équation $x_1 = 0$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^{2k+1}(R)) &= \int_{-R}^{+R}\left(\int_{B_x} dy\right)dx \\ &= \int_{-R}^{+R}\frac{\pi^k}{k!}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^{2k}dx \\ &= \frac{\pi^k}{k!}\int_{-R}^{+R}(R^2-x^2)^k dx\end{aligned}$$

En posant $x = R\sin\theta$, on obtient

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^{2k+1}(R)) = \frac{\pi^k}{k!}R^{2k+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2k+1}dx$$

Ce qui donne après calcul de $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2k+1}dx$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^{2k+1}(R)) &= \frac{\pi^k}{k!}R^{2k+1}2\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}\right) \\ &= \frac{2^{k+1}\pi^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}R^{2k+1}\end{aligned}$$

qui montre bien que la formule (2) donne le volume de la boule $\mathbb{B}^{2k+1}(R)$. □

1.3. Application : volume d'un ellipsoïde

Soit $\mathcal{E}^n$ l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ défini l'équation cartésienne

$$\mathcal{E}^n = \left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{a_i^2}\leq 1\right\}$$

où a_i, $i = 1,\ldots,n$ sont des nombres réels strictement positifs. Son volume est donné par l'intégrale

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}^n) = \int_{\mathcal{E}^n} dx_1\ldots dx_n.$$

Pour la calculer nous allons procéder à un changement de variable et ramener le problème à une boule de $\mathbb{R}^n$. Soit Φ le difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $\Phi(u_1,\ldots,u_n) = (x_1,\ldots,x_n)$ avec $x_i = a_iu_i$ pour $i = 1,\ldots,n$. Il transforme la unité unité $\mathbb{B}^n$ en l'ellipsoïde $\mathcal{E}^n$. Son déterminant jacobien est égal à $\Delta(\Phi) = a_1\cdot\ldots\cdot a_n$. La formule de changement de variable nous donne

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\mathcal{E}^n) &= \int_{\mathcal{E}^n} dx_1\ldots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{B}^n}\Delta(\Phi)dx_1\ldots dx_n \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n).\end{aligned}$$

En tenant compte des calculs faits antérieurement on obtient

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}^n) = \begin{cases} \frac{(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)\pi^k}{k!} & \text{pour } n = 2k \\ \frac{(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)2^{k+1}\pi^k}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)} & \text{pour } n = 2k+1 \end{cases}$$

2. Volume des sphères

Nous allons commencer par définir la mesure canonique sur la sphère $\mathbb{S}^n(R)$. La construction de cette mesure se fera à l'aide de coordonnées bien adaptées qu'on appelle habituellement les *coordonnées sphériques.*

2.1. La mesure canonique sur la sphère

On note Ω l'ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ donné par

$$\Omega = \left\{(r,\theta)|r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta_1, \ldots, \theta_{n-1} < +\frac{\pi}{2} \text{ et } 0 < \theta_n < 2\pi\right\}.$$

où $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$. On considère l'application $\Omega \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^{n+1}$ qui à $(r, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ associe le point $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ donné par

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1\cdot\ldots\cdot\cos\theta_{n-1}\cos\theta_n \\ x_2 &= r\cos\theta_1\cdot\ldots\cdot\cos\theta_{n-1}\sin\theta_n \\ x_3 &= r\cos\theta_1\cdot\ldots\cdot\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\ \ldots &= \ldots\cdot\ldots \\ x_n &= r\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ x_{n+1} &= r\sin\theta_1 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que cette application est de classe C^∞ (analytique même), injective et que l'image $\Phi(\Omega)$ est un ouvert E de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont le complémentaire a une mesure de Lebesgue nulle (pour s'en assurer le lecteur pourrait faire un dessin dans le cas de la sphère $\mathbb{S}^2(R)$ de $\mathbb{R}^3$). L'application Φ a pour déterminant jacobien (calcul facile mais indigeste)

$$\Delta(\Phi) = r^n\cos^{n-1}\theta_1\cdot\cos^{n-2}\theta_2\cdot\ldots\cdot\cos\theta_{n-1}.$$

Si $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, le théorème de changement de variable nous donne

$$\int_E h(x)d\lambda = \int_\Omega (f\circ\Phi)drd\theta_1\ldots d\theta_n.$$

On fixe $R > 0$; la mesure

$$d\sigma = R^n\cos^{n-1}\theta_1\cdot\cos^{n-2}\theta_2\cdot\ldots\cdot\cos\theta_{n-1}d\theta_1\ldots d\theta_n$$

est appelée l'*élément d'aire* sur $\mathbb{S}^n(R)$. A titre d'exercice, le lecteur peut montrer que cette mesure est invariante par toute isométrie linéaire de $\mathbb{R}^{n+1}$ *i.e.* une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ qui vérifie

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ où $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_{n+1} y_{n+1}$.

2.2 Le volume de $\mathbb{S}^n(R)$

Il est donné par l'intégrale

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n(R)) = \int_{\mathbb{S}^n(R)} d\sigma$$

qui est égale à

$$R^n \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} \theta_1 d\theta_1 \cdot \ldots \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \theta_{n-1} d\theta_{n-1} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta_n.$$

En utilisant les formules

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k)} \frac{\pi}{2}$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)},$$

que le lecteur pourrait établir facilement, on obtient

(3) $$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{2k}(R)) = \frac{2^{k+1} \pi^k}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)} R^{2k}.$$

et

(4) $$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{2k+1}(R)) = \frac{2\pi^{k+1}}{k!} R^{2k+1}.$$

Ce qui termine les calculs. □

Compléments 2
Intégrale de Riemann

Nous allons rappeler la définition de l'intégrale de Riemann sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit intégrable au sens de Riemann ainsi que le lien avec l'intégrale de Lebesgue.

La mesurabilité d'une fonction réelle f définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sera entendue au sens de la tribu borélienne induite sur $[a, b]$.

1. Définition de l'intégrale de Riemann

Dans toute la suite $[a, b]$ sera un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *subdivision* de $[a, b]$ toute suite finie $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Pour tout $i = 1, \dots, n$ on pose $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. On appelle *diamètre* de S, le nombre réel strictement positif

$$\delta(S) = \sup_{i=1,\dots,n} \delta_i.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a, b]$. Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée (*i.e.* telle que il existe $C > 0$ vérifiant $\sup_{a \le x \le b} |f(x)| \le C$) et $S \in \mathcal{S}$. On pose

$$I(f)(S, z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\delta_i \qquad (1)$$

où z_i est un élément quelconque de l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. La quantité (1) est appelée *somme de Riemann* de f. Comme on le voit bien elle dépend évidemment du choix du couple (S, z_S) où $S \in \mathcal{S}$ et $z_S = (z_1, \dots, z_n) \in]x_0, x_1[\times \dots \times]x_{n-1}, x_n[$. Soit $\widetilde{\mathcal{S}}$ l'ensemble des couples (S, z_S).

1.1. Définition. *On dira que f est* **intégrable au sens de Riemann** *(ou* **Riemann-intégrable***) si la famille $I(f)(S, z_S)$ (paramétrée par $(S, z_S) \in \widetilde{\mathcal{S}}$) a une limite dans $\mathbb{R}$ quand le diamètre de S tend vers 0. Cette limite est alors appelée intégrale de Riemann de f sur l'intervalle $[a, b]$, on la note*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Rappelons quelques propriétés des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$; nous les résumons dans la proposition qui suit.

1.2. Proposition. *Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors*

i) $f+g$ est Riemann-intégrable et $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$,

ii) αf est Riemann-intégrable et $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

i.e. l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ est un espace vectoriel réel sur lequel l'intégrale est une forme linéaire.

2. Lien avec l'intégrale de Lebesgue

Soit $S \in \mathcal{S}$. On définit deux fonctions associées à f de la façon suivante : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ soient

$$m_i = \inf_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x) \text{ et } M_i = \sup_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x)$$

et posons

$$f_+^S(x) = \sum_{i=1}^n M_i 1_{]x_{i-1}, x_i[} \text{ et } f_-^S(x) = \sum_{i=1}^n m_i 1_{]x_{i-1}, x_i[}.$$

Alors f_+^S et f_-^S sont deux fonctions étagées mesurables. On pose

$$I(f_-^S) = \sum_{i=1}^n m_i \delta_i \text{ et } I(f_+^S) = \sum_{i=1}^n M_i \delta_i.$$

Les quantités $I(f_-^S)$ et $I(f_+^S)$ sont appelées respectivement *somme inférieure de Darboux* et *somme supérieure de Darboux* de f relativement à la subdivision S de $[a,b]$. On a évidemment

$$\text{(2)} \qquad I(f_-^S) \leq I(f)(S, z_S) \leq I(f_+^S)$$

pour tout z_S avec S fixée. Posons

$$I_-(f) = \sup_S I(f_-^S) \text{ et } I_+(f) = \inf_S I(f_+^S).$$

On démontre alors, à partir de l'inégalité (2), le

2.1. Théorème. *La fonction f est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ si, et seulement si, $I_-(f) = I_+(f)$.*

Ce théorème donne une autre définition de l'intégrale de Riemann. Celle-ci permet de caractériser les fonctions qui sont Riemann-intégrables et de donner le lien avec l'intégrale de Lebesgue. Comme d'habitude λ sera la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$ et pour toute fonction mesurable $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable ou dont l'intégrale vaut $+\infty$ ou $-\infty$ on notera

$$\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x)$$

son intégrale de Lebesgue pour la distinguer de son intégrale de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx$$

quand elle existe.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in [a,b]$ on pose

$$f_+^\varepsilon(x) = \sup\{f(z) \text{ pour } z \in [a,b] \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\}$$

et

$$f_-^\varepsilon(x) = \inf\{f(z) \text{ pour } z \in [a,b] \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\}.$$

Pour x fixé f_+ décroit et f_- croit quand ε décroit. On a d'autre part pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in [a,b]$:

$$f_-^\varepsilon(x) \leq f(x) \leq f_+^\varepsilon(x).$$

On définit maintenant deux fonctions f_+ et f_- sur $[a,b]$ par

$$f_+(x) = \inf_{\varepsilon \to 0} f_+^\varepsilon(x) \text{ et } f_-(x) = \sup_{\varepsilon \to 0} f_-^\varepsilon(x).$$

Les fonctions f_+ et f_- sont appelées respectivement la *fonction inférieure de Baire* et la *fonction supérieure de Baire* associées à f.

2.2. Proposition. *La fonction f est continue en $x \in [a,b]$ si, et seulement si, $f_+(x) = f_-(x)$.*

La démonstration est assez facile et est laissée au lecteur. □

2.3. Proposition. *Les fonctions f_+ et f_- sont mesurables.*

Démonstration. Nous la ferons pour f_- ; elle est la même pour f_+. Soit $(S^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de subdivisions $\{x_0^k, x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k\}$ de l'intervalle $[a,b]$ telles que

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\max_{0\leq i\leq n_k-1}(x_{i+1}^k - x_i^k)\right) = 0.$$

Posons (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $i = 0, \ldots, n_k - 1$) :

$$m_i^k = \inf_{z\in[x_i^k, x_{i+1}^k]} f(z)$$

et

$$h^k = \sum_{i=0}^{n_k-1} m_i^k 1_{]x_i^k, x_{i+1}^k[}. \qquad (3)$$

La fonction h^k est étagée mesurable. Pour montrer que f_- est mesurable, il suffit de montrer que h^k tend vers f_- en tout point du complémentaire dans $[a,b]$

du sous-ensemble $N = \bigcup_{k,n_k}\{x^k_{n_k}\}$ qui est dénombrable (donc de mesure nulle). Soit $x \in [a,b] - N$; alors il existe un $i_k \in \{0,1,\dots,n_k-1\}$ tel que $x \in]x^k_{i_k}, x^k_{i_k+1}[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]x^k_{i_k}, x^k_{i_k+1}[$. On a

$$\begin{aligned} h^k(x) &= \inf_{z\in[x^k_{i_k}, x^k_{i_k+1}]} f(z) \\ &\leq f^\varepsilon_-(x) \\ &\leq f_-(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $h^k(x) \leq f_-(x)$. Soit a un réel tel que $a < f_-(x)$. Alors comme $f_-(x) = \sup_\varepsilon f^\varepsilon_-(x)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f^\varepsilon_-(x) > a$. D'autre part il existe k_0 entier tel que

$$k \geq k_0 \Longrightarrow x \in [x^k_{i_k}, x^k_{i_k+1}] \subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$$

car

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\max_{0\leq i\leq n_k-1}(x^k_{i+1} - x^k_i)\right) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} m^k_i &= h^k(x) \\ &= \inf_{z\in[x^k_{i_k}, x^k_{i_k+1}]} f(z) \\ &\geq \inf_{z\in]x-\varepsilon,x+\varepsilon[} f(z) \\ &= f^\varepsilon_-(x) \end{aligned}$$

On a donc établi que pour tout réel a vérifiant $a < f_-(x)$, il existe un entier k, $k \geq k_0$ tel que $h^k(x) > a$. Ceci montre bien que $h^k(x) \to f_-(x)$ puisque pour tout k, $h^k(x) \leq f_-(x)$. □

La proposition qu'on vient d'établir va nous permettre de démontrer un théorème important caractérisant une fonction Riemann-intégrable sur un intervalle $[a,b]$ et le lien avec l'intégrale de Lebesgue.

2.4. Théorème. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est Riemann-intégrable si, et seulement si, elle est presque partout continue.*

Démonstration. La suite h^k tend presque partout vers f_-. D'autre part pour tout k, $|h^k| \leq ||f||_\infty < +\infty$ où $||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ puisque f est bornée. La constante $||f||_\infty$ est Lebesgue-intégrable puisque $[a,b]$ est de mesure finie. Le théorème de la convergence dominée montre alors

$$\int_{[a,b]} h^k(x)d\lambda(x) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f_-(x)d\lambda(x).$$

Mais

$$\int_{[a,b]} h^k(x)d\lambda(x) = \sum_{i=0}^{n_k-1} m_i^k(x_{i+1}^k - x_i^k) = I(f_-^{S^k})$$

où $I(f_-^{S^k})$ est la somme inférieure de Darboux relativement à la S^k qui est la subdivision $\{x_0^k, \dots, x_{n_k}^k\}$. On a donc

$$I(f_-^{S^k}) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f_-(x)d\lambda(x).$$

De façon similaire on montre que $I(f_+^{S^k}) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f_+(x)d\lambda(x)$. On obtient donc

$$(4) \qquad I(f_+^{S^k}) - I(f_-^{S^k}) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} (f_+(x) - f_-(x))\, d\lambda(x).$$

Comme f Riemann-intégrable équivaut à $\lim_{k\to+\infty}(I(f_+^{S^k}) - I(f_-^{S^k})) = 0$, f est Riemann-intégrable si, et seulement si,

$$\int_{[a,b]} (f_+(x) - f_-(x))\, d\lambda(x) = 0$$

qui est encore équivalent à $f_+ = f_-$ presque partout puisque $f_+ - f_-$ est une fonction positive. Cela signifie (d'après la proposition 2.2.) que f est Riemann-intégrable si, et seulement si, f est continue presque partout. □

De ce théorème on peut tirer le

2.5. Corollaire. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. Alors, si f est Riemann-intégrable, elle est Lebesgue-intégrable et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda(x).$$

La réciproque de ce corollaire est en général fausse comme nous allons le voir sur l'exemple qui suit.

2.6. Exemple

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors il est facile de voir que les sommes de Darboux de f relativement à n'importe quelle subdivision S de $[0,1]$ sont données par $I(f_-^S) = 0$ et $I(f_+^S) = 1$. Par suite f n'est pas Riemann-intégrable. Mais comme f est mesurable étagée sur $[0,1]$ qui est de mesure finie, elle est Lebesgue-intégrable. □

SOLUTIONS DES EXERCICES

Chapitre préliminaire

Exercice 0. 3.1

i) L'application $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ n'est rien d'autre que la distance euclidienne dans le plan.

Montrons que d' est une distance sur $\mathcal{P}$. La symétrie $d'(M,N) = d'(N,M)$ est immédiate ainsi que $d'(M,M) = 0$. Soient $M, N \in \mathcal{P}$ distints. Alors l'un d'eux au moins est différent de O (par exemple M) ; comme d est une distance on a $d(M,O) > 0$ et donc $d'(M,O) > 0$ ce qui prouve la propriété de séparation. Montrons l'inégalité du triangle. Soient M, N et $P \in \mathcal{P}$; on a

$$\begin{aligned} d'(M,N) &= d(M,O) + d(N,O) \\ &\leq d(M,O) + d(P,O) + d(P,O) + d(N,O) \\ &= d'(M,P) + d'(P,N). \end{aligned}$$

ii) Soit $(M_k)_{k\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{P}, d')$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $k, \ell \geq N_\varepsilon \Longrightarrow d'(M_k, M_\ell) < \varepsilon$. Ce qui implique que (M_k) stationne à partir d'un certain rang ou que $d(M_k, O) < \varepsilon$ pour $k \geq N_\varepsilon$; dans le premier cas la convergence est évidente et dans le second, la suite (M_k) converge vers le point O pour d. Comme $d'(M_k, O) = d(M_k, O)$, (M_k) converge vers O pour d'. L'espace métrique $(\mathcal{P}, d')$ est donc complet.

iii) De manière évidente la suite (M_k) avec $M_k = (1, \frac{1}{k})$, $k \geq 1$ converge pour d vers le point $M_0 = (1,0)$. Mais pour d' cette suite n'est même pas de Cauchy ; en effet pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} d'(M_k, M_\ell) &= d(M_k, O) + d(M_\ell, O) \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\ell^2}} \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

On peut donc dire que les distances d et d' ne sont pas équivalentes. □

Exercice 0. 3.2

Les propriétés de symétrie et de séparation pour d_1 découlent trivialement du fait que d est une distance. Pour montrer que d_1 vérifie l'inégalité du triangle nous allons d'abord montrer que si a, b et c sont trois nombres réels positifs tels que $a \leq b + c$ alors on a

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Pour fixer les idées on va supposer que $c \leq b$ (qui n'est nullement une restriction). On a $a + ab \leq (b + c) + a(b + c)$ *i.e.* $a(1 + b) \leq (1 + a)(b + c)$. En divisant les deux membres de cette inégalité par le nombre strictement positif $(1 + a)(1 + b)$ et en tenant compte du fait que $c \leq b$ on obtient

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Soient x, y et z trois éléments de X. En appliquant l'inégalité qu'on vient d'établir aux trois nombres réels popsitifs $a = d(x, y)$, $b = d(x, z)$ et $c = d(z, y)$, on obtient

$$d_1(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, x).$$

Le fait que d_2 soit une distance est trivial à établir.

Montrons que les distances d_1 et d_2 sont uniformément équivalentes à d. Pour cela il suffit d'établir la bicontinuité uniforme des applications identités

$$i : (X, d) \longrightarrow (X, d_1) \quad \text{et} \quad j : (X, d) \longrightarrow (X, d_2).$$

i) Comme, pour tous $x, y \in X$, $d_1(x, y) \leq d(x, y)$, i est lipshitzienne et donc uniformément continue. Démontrons la continuité uniforme de l'application i^{-1} : $(X, d_1) \longrightarrow (X, d)$. Il faut donc montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ on ait $d_1(x, y) < \eta \Longrightarrow d(x, y) < \varepsilon$. Si on se donne un nombre $\varepsilon > 0$ on peut vérifier aisément qu'il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

ii) On a toujours $d_2(x, y) \leq d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$; donc j est uniformément continue. Démontrons que j^{-1} est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et prenons η tel que $\eta < \inf\{1, \varepsilon\}$. Il est alors clair que $d_2(x, y) < \eta \Longrightarrow d(x, y) < \varepsilon$. Donc j est uniformément bicontinue. □

Exercice 0. 3.3

i) Soit A_n un ouvert de X_n. Alors $\pi_n^{-1}(A_n) = X_1 \times \ldots \times X_{n-1} \times A_n \times X_{n+1} \times \ldots$ qui est un ouvert de X pour $\mathcal{T}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la projection $\pi_n : X \longrightarrow X_n$ est continue.

Soient A un ouvert de X, $x_n \in \pi_n(A)$ et $x \in X$ tel que $\pi_n(x) = x_n$. Comme A est ouvert, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un ouvert A_n de X_n tel que $x_n \in A_n$ et $A \supset \prod_{n \geq 1} A_n$. Par conséquent $\pi_n(A) \supset A_n$. L'ensemble $\pi_n(A)$ est donc ouvert car voisinage de chacun de ses points. Ce qui montre que π_n est ouverte.

ii) Soit $\mathcal{S}$ une topologie sur X pour laquelle les projections π_n sont continues. Il est clair que $\mathcal{S}$ contient toutes les parties $\prod_{i \in \mathbb{N}^*} \Omega_i$ où $\Omega_i = X_i$ sauf au plus pour un indice $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $\Omega_n = A_n$ ouvert de X_n ; et donc toutes leurs intersections finies qui sont les parties de la forme $\prod_{i \in \mathbb{N}^*} \Omega_i$ avec

$$\Omega_i = \begin{cases} A_{n_j} & \text{pour } i = n_j,\ j = 1, \ldots, k \\ X_i & \text{sinon} \end{cases}$$

(A_{n_j} ouvert de X_{n_j}) ainsi que les réunions (quelconques) de parties de ce type. Donc $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{T}$.

iii) Soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Alors $B(x, \varepsilon) = \left\{(y_n) \in X : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) < \varepsilon\right\}$. Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ est convergente (de somme 1) il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Soit $\eta = \varepsilon - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} > 0$. Alors la partie

$$\prod_{n=1}^{N} B(x_n, \eta) \times \prod_{n>N} X_n$$

est contenue dans $B(x, \varepsilon)$. En effet, soit $y \in X$ tel que $d_n(x_n, y_n) < \eta$ pour $n = 1, \dots, N$. Alors

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) \\ &< \eta \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &< \eta + \varepsilon - \eta \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

iv) Il découle de iii) que pour tout point $x \in X$, tout voisinage de x pour d est un voisinage de x pour $\mathcal{T}$. Donc $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}_d$ définie par d. Mais comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n \leq 2^n d$, $\mathcal{T}_d$ rend continues toutes les projections π_n ; donc $\mathcal{T}_d$ est plus fine que $\mathcal{T}$. Par suite $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

v) Si $f : Y \longrightarrow X$ est continue, $\pi_n \circ f : Y \longrightarrow X_n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Inversement supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n \circ f$ soit continue. Soit $\mathcal{S}$ la topologie la plus fine sur X rendant continue f : ses ouverts sont les images par f des ouverts de Y. Cette topologie rend en particulier continues toutes les projections π_n car si A_n est un ouvert de X_n, $f^{-1}\left(\pi_n^{-1}(A_n)\right) = (\pi_n \circ f)^{-1}(A_n)$ est ouvert ($\pi_n \circ f$ est continue). La topologie $\mathcal{S}$ est donc plus fine que $\mathcal{T}$. Comme $f : Y \longrightarrow (X, \mathcal{S})$ est continue, il en résulte que $f : Y \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ l'est aussi.

vi) Supposons X_n complet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(x^k)_{k\geq 1}$ une suite de Cauchy dans (X, d). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$k, \ell \geq N \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n^k, x_n^\ell) < \varepsilon.$$

Ce qui implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n(x_n^k, x_n^\ell) < 2^n \varepsilon$ *i.e.* si on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_n^k)_{k\geq 1}$ est de Cauchy dans X_n. Comme X_n est complet, (x_n^k) converge (quand $k \to +\infty$) vers un élément $x_n \in X_n$. Soit s le plus gand entier tel que $2^s \varepsilon \leq 1$ et posons $C = 2^s$; alors

$$(k \geq N) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; d_n(x_n^k, x_n) \leq C\varepsilon.$$

Les limites x_n définissent un élément $x = (x_n)_n$ de X. Montrons que (x^k) converge vers x dans X. On a, pour $k \geq N$

$$\begin{aligned}d(x^k, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n^k, x_n)\\ &\leq C\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = C\varepsilon.\end{aligned}$$

L'espace métrique (X, d) est donc complet. □

Exercice 0. 3.4

La fonction $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ est clairement continue. Comme $[0,1]$ est compact, elle est uniformément continue. Elle sera lipschitzienne s'il existe un nombre réel $k > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [0,1]$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Ceci implique en particulier que la quantité $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$ est bornée (par k) sur l'ensemble $\{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \ : \ x \neq y\}$. Or

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{|f(x)|}{|x|} = x^{\frac{1-n}{n}}, \quad x \in]0,1]$$

ne l'est pas dès que $n \geq 2$. Donc f ne peut pas être lipschitzienne. □.

Chapitre I

Exercice I. 6.1

Soit $x \in \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$. Alors $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n^c$ et par suite $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$. Inversement si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$, il n'appartient à aucun des A_n donc n'appartient pas à leur réunion et par suite $x \in \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$. D'où

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c.$$

Cette formule nous donne $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c$ et donc

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c.$$

□

Exercice I. 6.2

i) On a $\mathcal{C} \subset b(\mathcal{C})$; donc $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(b(\mathcal{C}))$. D'autre part, comme $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu elle est aussi une algèbre de Boole et donc $\sigma(\mathcal{C}) \supset b(\mathcal{C})$ et par suite $\sigma(\mathcal{C}) \supset \sigma(b(\mathcal{C}))$. On a donc montré que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(b(\mathcal{C}))$.

ii) Il est évident qu'une tribu est une classe monotone. Inversement supposons que l'algèbre de Boole $\mathcal{A}$ soit une classe monotone. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ et posons $B_n = \bigcup_{k\leq n} A_k$. Alors la suite (B_n) est croissante et vérifie $\bigcup_{\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Comme $\mathcal{A}$ est une classe monotone, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un élément

de $\mathcal{A}$. Finalement comme $\mathcal{A}$ est fermée par passage au complémentaire et qu'elle contient Ω et $\emptyset$, elle est une tribu. □

Exercice I. 6.3

On a $\emptyset =]a_1, a_1[\times \ldots \times]a_n, a_n[$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels quelconques et $\mathbb{R}^n$ est le produit cartésien de n exemplaires de l'intervalee $]-\infty, +\infty[$; donc $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{S}$. Dans $\mathbb{R}$ l'intersection de deux intervalles est encore un intervalle ; soient $I_1 \times \ldots \times I_n$ et $J_1 \times \ldots \times J_n$ deux éléments de $\mathcal{S}$; alors leur intersection est $I_1 \cap J_1 \times \ldots \times I_n \cap J_n$; c'est donc encore un élément de $\mathcal{S}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; alors le complémentaire de I est au plus la réunion de deux intervalles ; on a alors

$$(I_1 \times \ldots \times I_n)^c = \bigcup J_1 \times \ldots \times J_n$$

où la réunion porte sur tous les produits cartésiens $J_1 \times \ldots \times J_n$ avec $J_k = I_k$ ou I_k^c et l'un au moins des facteurs du produit est du type I_k^c. On voit alors facilement que $(I_1 \times \ldots \times I_n)^c$ est encore un élément de $\mathcal{S}$. La famille $\mathcal{S}$ est donc une semi-algèbre de Boole. □

Exercice I. 6.4

i) Fixons $i \in I$ et soit $B_i \in \mathcal{A}_i$; alors $\pi_i^{-1}(A_i)$ est de la forme $\prod B_j$ où tous les B_j sont égaux respectivement à Ω_j sauf B_i qui est égal à A_i ; $\pi_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{S}$ et donc π_i est mesurable.

ii) Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur Ω pour laquelle les projections π_i sont mesurables. Il est clair que $\mathcal{B}$ contient toutes les parties $\prod_{j\in I} B_j$ où $B_j = \Omega_j$ sauf au plus pour un indice $i \in I$ pour lequel $B_i = A_i$ élément de $\mathcal{A}_i$ et donc leurs complémentaires qui sont encore des parties de cette forme, ainsi que les réunions dénombrables de parties de ce type. Donc $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{A}$.

iii) Si $f : E \longrightarrow \Omega$ est mesurable, $\pi_i \circ f : E \longrightarrow \Omega_i$ est mesurable pour tou $i \in I$. Inversement supposons que pour tout $i \in I$, $\pi_i \circ f$ soit mesurable. Soit $\mathcal{C}$ la plus grande tribu sur Ω rendant mesurable f : ses éléments sont les images par f des éléments de $\mathcal{B}$. Cette tribu rend en particulier mesurables toutes les projections π_i car, si A_i est un élement de $\mathcal{A}_i$, $f^{-1}\left(\pi_i^{-1}(A_i)\right) = (\pi_i \circ f)^{-1}(A_i)$ est un élément de $\mathcal{B}$ ($\pi_i \circ f$ est mesurable). La tribu $\mathcal{C}$ contient donc $\mathcal{A}$ et par suite l'identité $(\Omega, \mathcal{C}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{A})$ est mesurable. Comme $f : (E, \mathcal{B}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{C})$ est mesurable, il en résulte que $f : (E, \mathcal{B}) \longrightarrow (\Omega, \mathcal{A})$ l'est aussi. □

Exercice I. 6.5

i) La tribu $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ est aussi la tribu borélienne de $E \times E$ muni de la topologie produit (qui est associée à une métrique). Dans un tel espace la diagonale est toujours fermée, donc un élément de $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$.

ii) Soit $h : \Omega \longrightarrow E \times E$ l'application définie par $h(\omega) = (f(\omega), g(\omega))$; h est clairement mesurable et l'ensemble $\{\omega \in \Omega : f(\omega) = g(\omega)\}$ n'est rien d'autre que $h^{-1}(\Delta)$; c'est donc un élément de $\mathcal{A}$. □

Exercice I. 6.6

Sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ on considère la tribu $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cup \mathcal{B}_0$ où

$$\mathcal{B}_0 = \left\{B \cup \{-\infty\},\ B \cup \{+\infty\},\ B \cup \{-\infty, +\infty\}\ :\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right\}.$$

Alors on peut étendre facilement l'assertion ii) du théorème I. 5.3 à une suite de fonctions sur Ω à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On démontrerait alors que $\limsup(f_n)$ et $\liminf(f_n)$ sont mesurables. L'ensemble E des $\omega \in \Omega$ tels que $(f_n(\omega))$ converge dans $\mathbb{R}$ n'est alors rien d'autre que $\{\limsup(f_n) = \liminf(f_n)\} \cap \{|\limsup(f_n)| < +\infty\}$ qui est donc un élément de $\mathcal{A}$. □

Chapitre II

Exercice II. 5.1

i) Soient (A_n) une famille dénombrable de parties de Ω, deux à deux disjointes et posons $A = \bigcup_{n\geq 0} A_n$.

1er cas : A est finie. On a : $A = A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_k}$. Par suite $|A| = \sum_{j=1}^{k} |A_{n_j}|$. Si $I_k = \{n_1, \ldots, n_k\}$, le cardinal de A est égal à celui de $\bigcup_{n\in I_k} A_n$ et donc

$$m(A) = \sum_{n\in I_k} m(A_n) = \sum_{n\geq 0} m(A_n).$$

2ème cas : A est infinie. Alors il existe au moins n_0 tel que A_{n_0} soit infinie ou il existe une sous-famille infinie de (A_n) de parties de Ω toutes non vides. Dans les deux situations on a $+\infty = m(A) = \sum_{n\geq 0} m(A_n)$, *i.e.* m est *σ-additive.* D'autre part elle est égale à 1 sur les singletons ; par suite non constante avec la valeur $+\infty$. C'est donc une mesure.

ii) Supposons Ω dénombrable. On peut l'écrire : $\Omega = \bigcup_{n\geq 1}\{\omega_n\}$. Comme $m(\{\omega_n\}) = 1$, m est σ-finie. Inversement si m est σ-finie, il existe une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ et $m(A_n) = \alpha_n \in \mathbb{R}$. Alors A_n est finie ; par suite Ω est dénombrable car réunion dénombrable de parties finies. □

Exercice II. 5.2

i) Pour tout ensemble E, on note $|E|$ son cardinal. On a toujours $|A \cap B|) \leq \inf(|A|, |B|)$ donc $m(A \cap \{1, \ldots, n\}) \leq |A|$. Si donc A est finie $\frac{1}{n}|A| \longrightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$; par suite $\mu(A) = 0$.

ii) Dire que μ est *finiment additive*, c'est dire que pour toute famille finie (A_n) dans $\mathcal{A}$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, on a $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$. Soient $(A_i)_{i=1,\ldots,k}$ une telle famille, $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ et posons $B_i = A_i \cap \{1, \ldots, n\}$ Alors $A \cap \{1, \ldots, n\} = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ et les B_i sont deux à deux disjoints. D'où

$$\left|A \cap \{1, \ldots, n\}\right| = \sum_{i=1}^{k} |B_i|$$

c'est-à-dire $\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$. Ce qui montre que μ est finiment additive.

iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $A_n = \{n\}$. Alors $A_n \cap A_p = \emptyset$ pour $n \neq p$ et $\mathbb{N} = \bigcup_{n\geq 0} A_n$. D'après la question i) on a $\mu(A_n) = 0$ mais $m(\mathbb{N} \cap \{1, \ldots, n\}) = n$ et donc $\mu(A_n) = 1$. La σ-additivité n'est donc pas satisfaite. □

Exercice II. 5.3

L'ensemble E_i^n est fini. En effet, s'il ne l'était pas il contiendrait une partie infinie dénombrable $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \}$. Si $A_k = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ on a

$$\mu(A_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu(\{\omega_j\}) > \frac{k}{n}$$

Comme (A_k) tend en croissant vers A, $(\mu(A_k))$ tend en croissant vers $\mu(A)$. Par suite $\mu(A) = +\infty$ et donc $\mu(E_i^n) = +\infty$ puisque $A \subset E_i^n$. Mais ceci est impossible car $E_i^n \subset \Omega_i$ et $\mu(\Omega_i) < +\infty$. La partie E_i^n est donc finie.

Pour finir il suffit de remarquer que $E = \bigcup_{i,n} E_i^n$ *i.e.* E est réunion dénombrable de parties finies, donc il est dénombrable. □

Exercice II. 5.4

Pour montrer que μ est une mesure, il suffit de montrer que μ est non constante avec la valeur $+\infty$, qu'elle est additive et que si (B_k) est une suite dans $\mathcal{A}$ qui tend en croissant vers B, alors $\mu(B_k)$ tend en croissant vers $\mu(B)$.

i) On a $\mu(\emptyset) = \lim \mu_n(\emptyset) = 0$; donc μ est non constante avec la valeur $+\infty$.

ii) Soient $B, C \in \mathcal{A}$ tels que $B \cap C = \emptyset$. Alors

$$\begin{aligned}\mu(B \cup C) &= \lim \mu_n(B \cup C)\\ &= \lim(\mu_n(B) + \mu_n(C))\\ &= \lim \mu_n(B) + \lim \mu_n(C)\\ &= \mu(B) + \mu(C)\cdot\end{aligned}$$

Ceci démontre que μ est additive.

iii) Soit (B_k) une suite dans $\mathcal{A}$ qui tend en croissant vers B. Pour tout n et tout k on a $\mu_n(B_k) \leq \mu_n(B_{k+1})$; en passant à la limite sur n, on obtient $\mu(B_k) \leq \mu(B_{k+1})$ *i.e.* la suite $(\mu(B_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour montrer qu'elle tend vers $\mu(B)$ on distinguera deux cas : $\mu(B) < +\infty$ et $\mu(B) = +\infty$.

1er cas : $\mu(B) < +\infty$

Supposons que $(\mu(B_k))$ ne tend pas vers $\mu(B)$ *i.e.* il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite (B_ℓ) de (B_k) tels que $|\mu(B_\ell) - \mu(B)| \geq \varepsilon$ pour tout ℓ. Alors pour tout n on a

$$|\mu(B_\ell) - \mu_n(B_\ell)| + |\mu_n(B_\ell) - \mu_n(B)| + |\mu_n(B) - \mu(B)| \geq \varepsilon$$

car

$$|\mu(B_\ell) - \mu(B)| \geq \varepsilon.$$

L'un au moins des trois termes du premier membre doit être supérieur ou égal à $\frac{\varepsilon}{3}$. Ce n'est ni le premier ni le troisième en raison de la convergence de μ_n vers μ. Ce serait forcément le second ; mais ceci ne saurait se produire pour tout n, puisque μ_n est une mesure et doit donc vérifier la propriété de convergence monotone.

2ème cas : $\mu(B) = +\infty$

Montrons que $\mu(B_k)$ tend en croissant vers $+\infty$. Supposons le contraire *i.e.* la suite $\mu(B_k)$ est bornée par $\alpha > 0$. On a $\mu(B_k) \leq \alpha$ pour tout k. Comme, pour tout n, $\mu_n(B_k) \leq \mu(B_k)$, on aura finalement, pour tout couple (n, k), $\mu_n(B_k) \leq \alpha$ et donc $\mu(B) \leq \alpha$; ce qui est une contradiction.

On a finalement montré que l'application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$. □

Exercice II. 5.5

Comme C_k tend en croissant vers H quand k tend vers $+\infty$, la suite $(\lambda(C_k))$ tend en croissant vers $\lambda(H)$. Mais $\lambda(C_k) = (2k)^{n-1} \times 0 = 0$ donc $\lambda(H) = 0$ et par suite la mesure de Lebesgue d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ ou toute partie contenue dans un hyperplan est nulle. □

Exercice II. 5.6

Posons $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mu_n$ et $\nu_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \mu_n$. Alors ν_N est une suite de mesures qui tend en croissant vers l'application $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$; d'après l'exercice II. 5.4, μ est une mesure. D'autre part on a clairement $\mu(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mu_n(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$ donc μ est une probabilité sur $\mathcal{A}$. □

Exercice II. 5.7

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{A}$ on pose $\mu_N(A) = \sum_{n=0}^{N} a_n 1_A(\omega_n)$; alors μ_N n'est rien d'autre que le barycentre des mesures de Dirac $\delta_{\omega_1}, \dots, \delta_{\omega_N}$ affectées des coefficients $a_1, \dots, a_N$ qui est donc une mesure. La suite μ_N est croissante ; d'après l'exercice II. 5.4, sa limite μ est une mesure. Enfin $\mu(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mu_n(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ qui est donc $< +\infty$ et qui montre bien que μ est finie. Inversement soit μ une mesure finie sur $\mathcal{A}$. Posons $a_n = \mu(\{\omega_n\})$. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge (sa somme est $\mu(\Omega)$) et on a clairement pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 1_A(\omega_n)$. □

Chapitre III

Exercice III. 6.1

i) On a $\int_{]0,+\infty[} f_n d\lambda = \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{n} 1_{[n,2n]} d\lambda = \frac{1}{n}\lambda([n, 2n]) = 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est intégrable.

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sup |f_n| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$. La suite (f_n) converge donc uniformément vers 0 mais la suite des intégrales respectives ne converge pas vers l'intégrale de 0 (qui est bien sûr 0). □

Exercice III. 6.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est intégrable d'intégrale

$$\int_\Omega f_n(x) d\lambda(x) = n\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Soit $x \in [0, 1]$. Si $x = 0$ on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; si $x \neq 0$ il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{N} < x$, donc $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq N$. Dans tous les cas (f_n) converge simplement vers 0. Et évidemment la suite $\left(\int f_n\right)$ ne converge pas vers 0. □

Exercice III. 6.3

Les égalités $f_n + f = \sup(f_n, f) + \inf(f_n, f)$ et $|f_n - f| = \sup(f_n, f) - \inf(f_n, f)$ sont évidentes ; leur vérification est laissée au lecteur. Elles nous donnent

$$|f_n - f| = f_n + f - 2\inf(f_n, f).$$

Posons $g_n = \inf(f_n, f)$; alors (g_n) converge presque partout vers f et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $g_n \leq f$. Comme f est intégrable le théorème de Lebesgue nous dit que la suite $\left(\int_\Omega g_n\right)$ tend vers $\int_\Omega f$. On a alors

$$\int_\Omega |f_n - f| d\mu = \int_\Omega f_n d\mu + \int_\Omega f d\mu - 2 \int_\Omega g_n d\mu.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0$. □

Exercice III. 6.4

Soit $\Omega =]0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ qui est finie. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Il est clair que (f_n) est une suite de fonctions positives convergeant simplement vers f. D'autre part f_n est intégrable d'intégrale $\int_\Omega f_n(x) d\lambda(x) = 1 + \ln n$ qui tend vers $+\infty$ qui est la valeur de $\int_\Omega f(x) d\lambda(x)$. Mais $\int_\Omega |f_n - f| d\lambda = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et par conséquent (f_n) ne converge pas vers f pour la norme $\|\ \|_1$. □

Exercice III. 6.5

Supposons d'abord f positive. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée positive $\varphi = \sum_{k=1}^n a_k 1_{A_k}$ (avec $a_k \geq 0$) intégrable et telle que $\varphi \leq f$ et $\int_\Omega f - \int_\Omega \varphi \leq \varepsilon$. On pose $A = \bigcup_{a_k > 0} A_k$; il est facile de voir que $\mu(A) = \sum_{a_k>0} \mu(A_k) < +\infty$ et $\int_\Omega \varphi = \int_A \varphi$. Comme $\int_\Omega f = \int_A f + \int_{A^c} f$, de l'inégalité $\int_A (f - \varphi) + \int_{A^c} f < \varepsilon$ on déduit $\int_\Omega f - \int_A f = \int_{A^c} f \leq \varepsilon$.

Si f n'est pas positive on peut l'écrire $f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- positives. D'après ce qui précède, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A^+, A^- \in \mathcal{A}$ de mesure finie tels que

$$\int_\Omega f^+ - \int_{A^+} f^+ \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \int_\Omega f^- - \int_{A^-} f^- \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $A = A^+ \cup A^-$; on peut voir facilement qu'on a aussi

$$\int_\Omega f^+ - \int_A f^+ \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \int_\Omega f^- - \int_A f^- \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega f - \int_A f\right| &= \left|\int_\Omega (f^+ - f^-) - \int_A (f^+ - f^-)\right| \\ &= \left|\left(\int_\Omega f^+ - \int_A f^+\right) - \left(\int_\Omega f^- - \int_A f^-\right)\right| \\ &\leq \left|\left(\int_\Omega f^+ - \int_A f^+\right)\right| + \left|\left(\int_\Omega f^- - \int_A f^-\right)\right| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Exercice III. 6.6

i) Soit $A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq 1\}$. Alors $|f|^p = 1_A|f|^p + 1_{A^c}|f|^p \leq 1_A|f|^p + 1$. Comme sur A on a $f \geq 1$ on a $1_A|f|^p \leq 1_A|f|^q$ pour $p \leq q$ et par suite $|f|^p \leq 1_A|f|^q + 1$ qui donne $\int_\Omega |f|^p \leq \int_\Omega |f|^q + \mu(\Omega)$. Si f est dans $\mathcal{L}^q$, elle est dans $\mathcal{L}^p$ *i.e.* $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$.

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit f_n la fonction $1_{[\alpha_n,1]}f$ où (α_n) est une suite décroissante dans $]0,1]$ tendant vers 0. Alors f_n est intégrable et tend en croissant vers f. On a

$$\int f_n = 1 - 2\sqrt{\alpha_n} \text{ tend vers } \int f = 1.$$

Donc f est intégrable. Un calcul immédiat montre par contre que le carré de f ne l'est pas.

iii) Il est clair que g n'est pas intégrable. Montrons toutefois que son carré l'est. On a

$$\begin{aligned}\int |g(x)|^2 d\lambda(x) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{]1,n]} \frac{1}{x^2}dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n \\ &=1.\end{aligned}$$

iv) On n'a pas en général $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q$ pour $p \leq q$ et, si la mesure de Ω n'est pas finie, on n'a pas l'inclusion $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$. □

Exercice III. 6.7

i) Soient E_- et E_+ les parties de $\mathbb{R}$ définies comme suit

$$E_- = \{t \in \mathbb{R} : \mu(\{f < t\}) = 0\} \text{ et } E_+ = \{s \in \mathbb{R} : \mu(\{f > s\}) = 0\}.$$

Soient $a \in E_-$ et $b \in E_+$; alors comme $\mu(\{f < a\}) = 0$ on ne peut avoir $b < a$; donc $a \leq b$ *i.e.* tout élément de E_- est inférieur à n'importe quel élément de E_+. Ce qui donne $m(f) \leq M(f)$.

ii) Comme g est intégrable et f essentiellement bornée, la fonction fg est intégrable. En plus on a presque partout la double inégalité $m(f)g \leq fg \leq M(f)g$, qui donne bien la *première formule de la moyenne*

$$m(f)\int_\Omega g d\mu \leq \int_\Omega fg d\mu \leq M(f)\int_\Omega g d\mu.$$

Elle généralise celle connue pour l'intégrale de Riemann des fonctions continues sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$. □

Exercice III. 6.8

i) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $A_t = t + A$; alors $\mathbf{1}_{A\cap A_t}(x) = \mathbf{1}_A(x+t)\mathbf{1}_A(x)$. Comme $A_t \cap A \subset A$ on a $\mathbf{1}_{A\cap A_t} \leq \mathbf{1}_A$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x+t)\mathbf{1}_A(x)d\lambda(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x)d\lambda(x) = \lambda(A) < +\infty$$

i.e. la fonction $x \longmapsto \gamma(x,t)$ est intégrable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

ii) Pour x fixé, la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)$ est continue et pour t fixé, $x \longrightarrow \varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)$ est intégrable car $|\varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)| \le |\gamma(x,t)|$ qui est intégrable d'après i).

Soient $t \in \mathbb{R}$ et (t_n) une suite de réels convergeant vers t. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_\varepsilon^n(x) = \varphi_\varepsilon(x+t_n)\mathbf{1}_A(x)$; alors

a) $|\varphi_\varepsilon^n(x)| \le \mathbf{1}_A(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

b) $\varphi_\varepsilon^n(x)$ converge vers $\varphi_\varepsilon(x,t)$, pour x fixé, car φ_ε est continue en t. Le théorème de convergence dominée implique alors que l'intégrale de $\varphi_\varepsilon^n(x)$ converge vers celle de $\varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)$ *i.e.* $h_\varepsilon(t)$ est continue en t.

iii) Calculons

$$\begin{aligned}|h(t)-h_\varepsilon(t)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \gamma(x,t)d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)d\lambda(x)\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}} |\gamma(x,t) - \varphi_\varepsilon(x+t)\mathbf{1}_A(x)|\, d\lambda(x) \\ &\le \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_A(x+t) - \varphi_\varepsilon(x+t)|\, d\lambda(x) \\ &\le \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $\sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)-h_\varepsilon(t)| \le \varepsilon$. Ce qui implique que h_ε tend uniformément vers h quand ε tend vers 0. Par suite h est continue, car limite uniforme de fonctions continues.

iv) On a $h(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_A(x)d\lambda(x) = \lambda(A)$. Comme h est continue et $\lambda(A) > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\delta,+\delta[$, $h(t) > 0$.

v) Pour $t \in]-\delta,+\delta[$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x+t)\mathbf{1}_A(x)d\lambda(x)$ est strictement positive ; la fonction intégrée est donc strictement positive en au moins un point (qui dépend de t) qu'on notera x_t. Ce point est tel que $\mathbf{1}_A(x+t) > 0$ et $\mathbf{1}_A(x) > 0$ *i.e.* $x_t \in A$ et $x_t + t \in A$.

vi) D'après ce qui précède pour tout $t \in]-\delta,+\delta[$, $x_t \in A$ et $x_t+t \in A$, donc $t = x_t + t - x_t \in A - A = E$; autrement dit $]-\delta,+\delta[\subset E$. Ce qui montre que E est un voisinage de 0.

Comme on l'a remarqué dans l'énoncé du problème, ce résultat reste vrai même si $\lambda(A) = +\infty$.

vii) Supposons que F contient un rationnel non nul r. Cela signifie que $r = x - y$ avec $x \in B$ et $y \in B$; x et y sont donc équivalents (et différents) ; ceci contredit le fait que B contient un et un seul élément de chaque classe d'équivalence. L'ensemble F ne peut donc être un voisinage de 0.

viii) Soient r et r' des éléments distincts de $\mathbb{Q}$ tels que $(r+B)\cap(r'+B) \ne \emptyset$. Alors il existe $x, y \in B$ tels que $r + x = r' + y$; d'où $x - y = r' - r$. Ce qui implique que $x \ne y$ et x équivalent à y. Contradiction puisque B contient au plus un élément de chaque classe d'équivalence ; par suite $(r+B)\cap(r'+B) = \emptyset$. Tout élément $z \in \mathbb{R}$ est dans une classe d'équivalence et une seule *i.e.* il existe un et un seul élément $x \in B$ tel que $z - x = r \in \mathbb{Q}$ c'est-à-dire $z \in r + B$. Donc $\mathbb{R} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(r+B)$.

ix) Comme $B \in \mathcal{B}$ (c'est l'hypothèse qu'on a faite), $(r+B) \in \mathcal{B}$ car l'application $x \longmapsto x + r$ étant continue est mesurable ; d'où, d'après viii),

$$+\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \lambda(r+B).$$

Il existe donc $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\lambda(r+B) > 0$. Comme λ est invariante par translation on a $\lambda(r+B) = \lambda(B)$; ce qui montre que $\lambda(B) > 0$.

x) D'après vi), $F = B - B$ est un voisinage de 0 ; mais cela contredit vii). L'ensemble B n'est donc pas mesurable au sens de Lebesgue. □

Chapitre IV

Exercice IV. 6.1

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a de façon évidente : $n1_N \leq f$. Ce qui donne $\int_\Omega (n1_N)d\mu \leq \int_\Omega f d\mu$ *i.e.* $\mu(N) \leq \frac{1}{n}\int_\Omega f d\mu$.

ii) L'inégalité qu'on vient d'établir est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on en déduit que N est de mesure nulle *i.e.* f est presque partout finie.

iii) Supposons $\mu(M) = 0$; alors pour tout n, on a $\int_M \varphi_n d\mu = 0$; d'où $I = 0$ et donc *a fortiori* $I < +\infty$.

Soit a un nombre réel stritement positif. On a $\lim 1_M\varphi_n \geq a1_M$. La propriété de Beppo-Levi entraine alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega 1_M\varphi_n \geq \int_\Omega a1_M \geq a\mu(M)$$

qui donne $\mu(M) \leq \frac{1}{a}I$. Cette inégalité étant vraie pour tout $a > 0$, il en résulte $\mu(M) = 0$. □

Exercice IV. 6.2

La fonction f n'est pas intégrable car sa valeur absolue $|f|$ ne l'est pas. Soit $\omega_1 \in \mathbb{N}$; alors f_{ω_1} est nulle sauf en deux points ω_2 et ω'_2 où elle prend la valeur -1 et $+1$; elle est donc intégrable d'intégrale nulle. Le même raisonnement vaut pour f_{ω_2} pour $\omega_2 \in \mathbb{N}$. Le théorème de Fubini n'est donc pas applicable. □

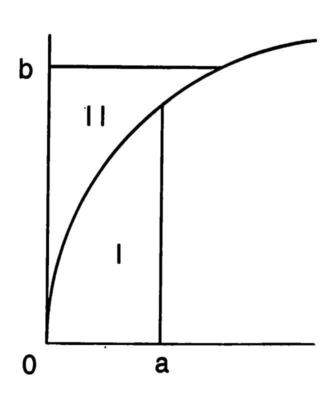
Exercice IV. 6.3

i) La fonction f est injective car, si $x \neq x'$ alors $x < x'$ ou $x' < x$. Et donc $f(x) < f(x')$ ou $f(x) < f(x')$. Dans les deux cas $f(x) \neq f(x')$. Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\phi(a) > y$. L'image de l'intervalle $[0, a]$ est exactement l'intervalle $[0, \phi(a)]$ (car ϕ est strictement croissante). Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence de $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \phi(x)$. La fonction ϕ est bijective ; elle admet donc une fonction inverse $\phi^{-1} = \psi$ strictement croissante.

ii) Il suffit de montrer que, si $b \neq \phi(a)$, alors on a une inégalité stricte

$$ab < \Phi(a) + \Psi(b).$$

Nous ne donnerons pas de démonstration ; nous invitons le lecteur à bien examiner les dessins de la Fig. 7 et faire lui-même les calculs ("un dessin dit toujours plus que mille mots").



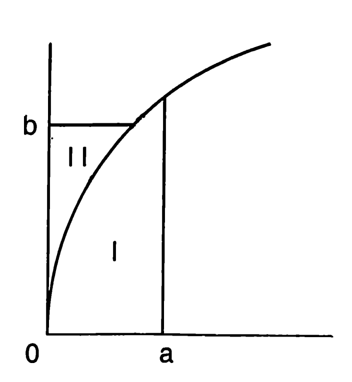


Fig. 7

iii) Si $\phi(x) = x^{p-1}$ avec $p > 1$, alors il est clair que ϕ est positive sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et vérifie $\phi(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty$. En outre $\psi(x) = x^{q-1}$ où q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Par suite $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$ et $\Psi(x) = \frac{x^q}{q}$. L'inégalité de Young donne alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. □

Exercice IV. 6.4

i) Pour tout $p \geq 1$ on a $|\varphi|^p \leq ||\varphi||_\infty^p$. Comme $\mu(\Omega) = 1$, la constante $||\varphi||_\infty^p$ est intégrable et donc $|\varphi|^p$ l'est *i.e.* $\varphi \in L^p$.

ii) L'inégalité de Hölder appliquée aux fonctions $f = |\varphi|^t$ et $g = 1$ et aux nombres conjugués $p = \frac{s}{t}$ et $q = \frac{r}{t}$ donne $\int_\Omega |\varphi|^t d\mu \leq \int_\Omega \left(|\varphi|^t\right)^{\frac{s}{t}} d\mu)^{\frac{t}{s}} ||1||_q$ c'est-à-dire $||\varphi||_t^t \leq ||\varphi||_s^t$ qui montre bien que la fonction $N : p \in [1, +\infty[\longmapsto ||\varphi||_p$ est croissante au sens large.

iii) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite convergeant vers p_0 et posons $\psi_n = |\varphi|^{p_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite (ψ_n) converge simplement vers ψ_0 et est dominée par la fonction intégrable $||\varphi||_\infty^k$ où $k = \sup_n p_n$ (qui existe car la suite (p_n) est convergente donc bornée). Le théorème de Lebesgue appliqué à la suite (ψ_n) nous dit que

$$\int_\Omega \psi_n d\mu \text{ tend vers } \int_\Omega \psi_0 d\mu$$

c'est-à-dire $N(p)$ tend vers $N(p_0)$; ce qui montre que N est continue. □

Chapitre V

Exercice V. 5.1

Montrons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n est une norme sur $\mathcal{H}$. La seule propriété non immédiate est la séparation. Soit $f \in \mathcal{H}$ telle que $p_n(f) = 0$; f est donc nulle identiquement sur le disque K_n et donc partout puisqu'elle est analytique.

La suite croissante de normes $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une topologie sur $\mathcal{H}$ qui est la même que celle associée à la distance invariante par translation

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}.$$

Pour montrer que $\mathcal{H}$, muni de cette suite de normes, est un espace de Fréchet il suffit de montrer qu'il est complet pour cette distance. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$ notons f_k^n la restriction de f_k à K_n. La suite $(f_k^n)_k$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $C^0(K_n, \mathbb{C})$ des fonctions complexes continues sur K_n muni de la norme p_n. Elle y converge donc vers un élément f^n tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la restriction de f^{n+1} à K_n soit égale à f^n. Il existe donc une fonction continue $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dont la restriction à K_n soit précisément f^n. La suite (f_k) converge donc uniformément sur tout compact K_n vers f. Montrons que f est holomorphe. Pour cela nous allons user du théorème de Morera que nous allons rappeler.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle chemin fermé dans $\mathcal{O}$ toute application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{O}$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Si $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue l'intégrale de f le long de γ sera, par définition, le nombre complexe (dont l'existence s'établit de manière similaire à celle de l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$) :

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ est une subdivision quelconque de $[0,1]$, $\delta = \sup\{|t_j - t_{j-1}|\}$ et ζ_j un élément arbitraire de $[t_{j-1}, t_j]$. Si f est holomorphe alors pour tout chemin fermé γ on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$ (cf. [Ca]).

Théorème de Morera : *Si pour tout chemin fermé γ de $\mathcal{O}$, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ alors f est holomorphe sur $\mathcal{O}$.*

Retour à l'exercice. Soit γ un chemin fermé dans $\mathbb{C}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'image de γ soit dans l'intérieur du disque K_n. Comme f_k est holomorphe, le théorème de Morera nous dit que $\int_\gamma f_k(z)dz = 0$. Et comme (f_k) converge uniformément sur K_n vers f, f_k converge uniformément vers f sur γ. Donc

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{k\to+\infty} \int_\gamma f_k(z)dz = 0$$

qui montre bien que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème de Morera. L'espace $\mathcal{H}$ est donc complet et par suite de Fréchet. □

Exercice V. 5.2

i) Si l'un des deux nombres a ou b est nul l'inégalité est trivialement vérifiée. Supposons donc $ab > 0$. On a

$$\begin{aligned}\log(ab) &= \log a + \log b \\ &= \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q \\ &\leq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).\end{aligned}$$

car la fonction log est concave. En prenant l'exponentielle de chacun des deux membres on obtient $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

ii) L'inégalité cherchée est vérifiée de manière évidente si l'une des fonctions f ou g est nulle μ-pp. Supposons donc que f et g sont toutes les deux non nulles μ-pp. En appliquant l'inégalité qui précède (en chaque point) aux fonctions positives

$$a = \frac{|f|}{||f||_p} \quad \text{et} \quad b = \frac{|g|}{||g||_q}$$

on obtient $\frac{|fg|}{||f||_p||g||_q} \leq \frac{|f|^p}{p||f||_p} + \frac{|g|^q}{q||g||_q}$. Et en intégrant les deux membres

$$\frac{1}{||f||_p||g||_q}\int_\Omega |fg| \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{\int_\Omega |f|^p}{||f||_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\int_\Omega |g|^q}{||g||_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'où $||fg||_1 \leq ||f||_p||g||_q$.

iii) Pour $p = 1$, l'inégalité est immédiate. Supposons $p > 1$. Alors $q = \frac{p}{p-1}$. Comme $f, g \in L^p$, $f + g \in L^p$ et donc $(f+g)^{p-1} \in L^q$. On a

$$\int_\Omega |f+g|^p = \int_\Omega |f+g|\cdot|f+g|^{p-1} \leq \int_\Omega |f|\cdot|f+g|^{p-1} + \int_\Omega |g|\cdot|f+g|^{p-1}.$$

Et d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega |f+g|^p \leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_\Omega |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

c'est-à-dire $||f+g||_p^p \leq ||f||_p\cdot||f+g||_p^{\frac{p}{q}} + ||g||_p\cdot||f+g||_p^{\frac{p}{q}}$ qui donne $||f+g||_p^{p-\frac{p}{q}} \leq ||f||_p + ||g||_p$. Mais comme $p - \frac{p}{q} = p - \frac{p(p-1)}{p} = 1$ on a $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ qui est l'inégalité cherchée.

iv) L'application $|| \ ||_p$ qui à $f \in L^p$ associe $||f||_p \in \mathbb{R}_+$ vérifie donc l'inégalité du triangle. Les propriétés de séparation et d'homogénéité sont immédiates à établir. Ceci montre donc que $|| \ ||_p$ est une norme sur l'espace vectoriel L^p.

v) Comme (f_n) est une suite de Cauchy, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe un entier N_k tel que $n, p \geq N_k \Longrightarrow ||f_n - f_p||_p \leq \frac{1}{2^k}$. Ainsi, si on définit la suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq N_k$, la suite $(f_{n_k})_k$ vérifie

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \frac{1}{2^k}.$$

vi) Les fonctions f_k étant mesurables, les h_k le seront aussi et par suite h est mesurable. Comme d'autre part h_k tend vers h en croissant, la propriété de Beppo-Levi implique que

$$\left(\int_\Omega h_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \uparrow \left(\int_\Omega h^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'autre part pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}||h_k||_p &\leq ||f_{n_1}||_p + \sum_{i=1}^{k} ||f_{n_{i+1}} - f_{n_i}||_p \\ &\leq ||f_{n_1}||_p + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \\ &\leq ||f_{n_1}||_p + 1 \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Donc $h \in L^p$ puisque les normes $||h_k||_p$ sont majorées indépendamment de k.

vii) Comme $h \in L^p$, elle est μ-pp finie. La série (u_n), dont le terme général est donné par $u_1 = f_{n_1}$ et $u_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ pour $k \geq 2$, a pour somme partielle $S_k = f_{n_k}$. Or on sait que cette série converge absolument μ-pp ; donc la suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge μ-pp vers une fonction mesurable f.

viii) On a

$$\begin{aligned}|f_{n_k}| &= \left| f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) \right| \\ &\leq |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{k} |(f_{n_{i+1}} - f_{n_i})| \leq h.\end{aligned}$$

Comme $h \in L^p$ le théorème de Lebesgue nous dit que $f \in L^p$ et (f_{n_k}) tend vers f dans L^p quand $k \to +\infty$. Pour $n \geq n_k$ on a

$$\begin{aligned}||f_n - f||_p &\leq ||f_n - f_{n_k}||_p + ||f_{n_k} - f||_p \\ &\leq \frac{1}{2^n} + ||f_{n_k} - f||_p\end{aligned}$$

qui montre bien que (f_n) tend vers f dans L^p. Nous avons donc montré que $(L^p, || \ ||)$ est un espace de Banach. □

Exercice V. 5.3

i) Montrons d'abord que $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel. Il est clair que si f est mesurable et μ-essentiellement bornée par α, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est μ-essentiellement bornée par $|\lambda|\alpha$. Ce qui montre l'homogénéité de $|| \ ||_\infty$ sur $\mathcal{L}^\infty$.

Soient $f, g \in \mathcal{L}^\infty$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$|f| \leq ||f||_\infty + \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad |g| \leq ||g||_\infty + \frac{1}{k} \quad \mu - \text{pp}.$$

Et donc $|f+g| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty + \frac{2}{k}$, inégalité vraie presque partout *i.e.* il existe une partie $N_k \subset \Omega$ de mesure nulle en dehors de laquelle cette inégalité est vraie. Elle sera donc vraie, pour tout k, en dehors de la réunion des N_k qui est un ensemble de mesure nulle ; on en déduit

$$|f + g| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty \quad \mu - pp$$

Et donc $||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$. Ce qui montre que $f+g \in \mathcal{L}^\infty$ et établit en même temps l'inégalité de convexité.

Sur $\mathcal{L}^\infty$, $||\ \ ||_\infty$ n'est pas une norme. En effet si $||f||_\infty = 0$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|f| \leq \frac{1}{k}$ μ-pp. En raisonnant comme en i) on montre que $f = 0$ μ-pp. Mais dans $L^\infty = \mathcal{L}^\infty/\mathcal{N}$, la classe de f est nulle ; donc $||\ \ ||_\infty$ est une norme sur L^∞.

ii) Soit (α_k) une suite de réels qui tend en décroissant vers $||f||_\infty$. Alors il existe une partie $N_k \subset \Omega$ de mesure nulle en dehors de laquelle on a $|f| \leq \alpha_k$; la réunion N des N_k est de mesure nulle et pour tout $\omega \in E = \Omega - N$ on a $|f(\omega)| \leq ||f||_\infty$. Ce qui montre que $\sup_{\omega\in E} |f(\omega)| \leq ||f||_\infty$. Soit $\beta = \sup_{\omega \in E} |f(\omega)|$; on vérifie facilement que $|f| \leq \beta$ μ-pp qui montre que $||f||_\infty \leq \sup_{\omega\in E} |f(\omega)|$ et termine la démonstration.

iii) En utilisant ii) on montre facilement qu'il existe un ensemble de mesure nulle $E \subset \Omega$ tel que pour tout (m, n) on ait

$$||f_n - f_m||_\infty = \sup_{\Omega - E} |f_n(\omega) - f_m(\omega)|.$$

La restriction de la suite (f_n) à $\Omega - E$ est donc de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme sur l'espace $\mathcal{B}(\Omega - E, \mathbb{R})$ des fonctions bornées $\Omega - E \longrightarrow \mathbb{R}$.

iv) Comme $\mathcal{B}(\Omega - E, \mathbb{R})$ est complet, la suite (f_n) converge vers une fonction $\widehat{f}$ bornée sur $\Omega - E$. On pose alors

$$f(\omega) = \begin{cases} \widehat{f}(\omega) & \text{si } \omega \in \Omega - E \\ 0 & \text{si } \omega \in E \end{cases}$$

La fonction f ainsi construite est mesurable, μ-essentiellement bornée et est la limite dans L^∞ de la suite (f_n). Autrement dit, l'espace normé L^∞ est un espace de Banach. □

Exercice V. 5.4

Il est clair que $\mathcal{C}_0$ est un espace vectoriel et que $||\ \ ||_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}_0$. Montrons qu'il est complet. Soit (X^k), $X^k = (x_n^k)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $k, \ell \geq N \Longrightarrow \sup_{n\geq 1} |x_n^k - x_n^\ell| < \varepsilon$. Donc pour n fixé, $(x_n^k)_{k\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$; elle converge donc ; notons x_n sa limite. Alors la suite (X^k) converge dans $\mathcal{C}_0$ vers $X = (x_n)_{n\geq 1}$. En effet, en passant à la limite sur ℓ dans l'inégalité $\sup_{n\geq 1} |x_n^k - x_n^\ell| < \varepsilon$, on obtient, pour $k \geq N$, $\sup_{n\geq 1} |x_n^k - x_n| < \varepsilon$. Cette inégalité montre que X_n est bornée et qu'elle converge vers X pour la norme $||\ \ ||_\infty$. Reste à montrer que $X \in \mathcal{C}_0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geq N \Longrightarrow \sup_{n\geq 1} |x_n^k - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|x_n| < |x_n^k| + \frac{\varepsilon}{2}$. Comme, d'autre part, $\lim_{n\to+\infty} x_n^k = 0$ pour n suffisamment grand on aura $|x_n^k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ce qui donne $|x_n| < \varepsilon$ qui montre bien que $\lim(x_n) = 0$ *i.e.* $X \in \mathcal{C}_0$. □

Chapitre VI

Exercice VI. 5.1

Il est clair que la restriction $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}}$ de la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ à $\mathcal{U}$ est plus fine que la restriction $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{U}}$ de la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ à $\mathcal{U}$. Montrons que $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{U}}$. Comme $\mathcal{U}$

est équicontinue, elle est bornée pour la norme $|||\ |||$ de $\mathcal{L}_c(E,F)$; posons $\alpha = \sup_{u\in\mathcal{U}}\{|||u|||\}$. Soient K un compact de E, $\varepsilon > 0$ et posons $\eta = \frac{\varepsilon}{1+2\alpha}$. Alors K peut être recouvert par un nombre fini de boules $\{B(a_i,\eta)\}_{i=1,\dots,n}$ où les a_i sont des éléments de K. Pour établir $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{\mathcal{U}}$ il suffit alors de montrer que l'ensemble

$$V(u,K,\varepsilon) = \left\{v \in \mathcal{U} : \sup_{y\in K} ||u(y) - v(y)|| < \varepsilon\right\}$$

contient l'intersection de $\mathcal{U}$ avec la partie $\bigcap_{i=1}^{n} V(u,\{a_i\},\eta)$. Soient $x \in B(a_i,\eta)$ et $v \in \mathcal{U} \cap (\bigcap_{i=1}^{n} V(u,\{a_i\},\eta))$. Alors

$$\begin{aligned}||u(x) - v(x)|| &\leq ||u(x) - u(a_i)|| + ||u(a_i) - v(a_i)|| + ||v(a_i) - v(x)||\\ &\leq |||u|||\eta + \eta + |||v|||\eta\\ &\leq (1+2\alpha)\eta = \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc $v \subset \mathcal{U} \cap V(u,K,\varepsilon)$. Ce qui démontre ce qu'on cherche. □

Exercice VI. 5.2

i) De manière évidente, E contient la réunion des A_n. Soit $x \in E$. Alors

$$\alpha = \sup_{u\in\mathcal{U}} ||u(x)|| < +\infty$$

car la famille $\mathcal{U}$ est simplement bornée. Si $n \in \mathbb{N}^*$ est tel que $n \geq \alpha$ il est clair que $x \in A_n$. Ce qui établit l'égalité $E = \bigcup_n A_n$. Les A_n sont clairement fermés et leur réunion est d'intérieur non vide (égale à E). D'après le théorème de Baire l'un des A_n a un intérieur non vide et donc tous puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = nA_1$; en particulier A_1 est d'intérieur non vide.

ii) Soient $x, y \in A_1$ et $t \in [0,1]$; alors pour tout $u \in \mathcal{U}$ on a

$$||u(tx + (1-t)y)|| = ||tu(x) + (1-t)u(y)|| \leq t + (1-t) = 1$$

i.e. A_1 est convexe. D'autre part si $x \in \mathrm{int}(A_1)$ alors $-x \in \mathrm{int}(A_1)$ *i.e.* $\mathrm{int}(A_1)$ est en plus symétrique, donc contient $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) = 0$. Il existe alors $\rho > 0$ tel que la boule $B(0,\rho)$ soit contenue dans A_1. Pour tout $x \in E$ non nul, $\rho\frac{x}{||x||} \in B(0,\rho) \subset A_1$. On a donc

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} |||u||| = \sup_{u\in\mathcal{U}}\left\{\sup_{||x||\leq 1} ||u(x)||\right\} \leq \frac{1}{\rho}.$$

Ce qui montre que la famille $\mathcal{U}$ est bornée dans l'espace normé $\mathcal{L}_c(E,F)$ *i.e.* elle est fortement bornée. □

Exercice VI. 5.3

Comme, pour tout $x \in E$, l'application partielle $\phi(x,\cdot)$ est continue, la suite $\phi(\cdot,y_n)$ qui est dans $\mathcal{L}_c(E,G)$ converge simplement vers 0. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, cette suite converge uniformément sur tout compact de E vers 0, en particulier sur le compact $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ *i.e.* $\sup_k \phi(x_k,y_n)$ tend vers 0.

Ce qui implique que la suite $(\phi(x_n, y_n))$ tend vers 0. Donc ϕ est continue en tant qu'application bilinéaire de $E \times F$ dans G. □

Exercice VI. 5.4

i) Soit $\varepsilon > 0$; alors il existe $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ telle que $||f - \varphi||_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$. On a

$$||\tau_x(f) - \tau_a(f)||_p \leq ||\tau_x(f) - \tau_x(\varphi)||_p + ||\tau_x(\varphi) - \tau_a(\varphi)||_p + ||\tau_a(\varphi) - \tau_a(f)||_p.$$

Mais

$$||\tau_x(f) - \tau_x(\varphi)||_p = \left\{\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - \varphi(x-y)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} = ||f - \varphi||_p \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

De même

$$||\tau_a(f) - \tau_a(\varphi)||_p = \left\{\int_{\mathbb{R}} |f(a-y) - \varphi(a-y)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} = ||f - \varphi||_p \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} ||\tau_a(\varphi) - \tau_x(\varphi)||_p &= \left\{\int_{\mathbb{R}} |\varphi(a-y) - \varphi(x-y)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \delta ||\tau_a(\varphi) - \tau_x(\varphi)||_\infty \end{aligned}$$

où $\delta = \lambda(K)^{\frac{1}{p}}$ avec K support de φ. Comme φ est uniformément continue (car continue à support compact), il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - a| < \eta \Longrightarrow ||\tau_a(\varphi) - \tau_x(\varphi)||_\infty < \frac{\varepsilon}{3\delta}.$$

On a donc finalement : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - a| < \eta \Longrightarrow ||\tau_x(f) - \tau_a(f)||_p < \varepsilon$$

qui montre bien la continuité uniforme de l'application $a \in \mathbb{R} \longmapsto \tau_a(f) \in L^p$.

ii) Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$. D'après ii), pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\tau_x(f)$ est dans L^p ; donc, d'après l'inégalité de Hölder (*cf.* exercice V. 5.2), la fonction $\tau_x(f)g$ est dans L^1 et on a

$$|f * g(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} \tau_x(f)(y)g(y)dy\right| \leq ||\tau_x(f)||_p \cdot ||g||_q = ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

Donc $f * g$ est partout définie ; comme le dernier terme ne dépend pas de x, cette fonction est bornée. Reste à montrer que $f * g$ est uniformément continue. Soient a et b deux réels. On a

$$|f*g(a)-f*g(b)| = \left|\int_{\mathbb{R}} (\tau_a(f)(x) - \tau_b(f)(x))g(x)dx\right|$$
$$\leq ||\tau_a(f) - \tau_b(f)||_p \cdot ||g||_q.$$

On sait alors d'après ii) que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|a-b| < \eta \Longrightarrow ||\tau_a(f) - \tau_b(f)||_p < \varepsilon.$$

Donc $|a-b| < \eta \Longrightarrow ||g||_q\varepsilon$. Ce qui montre la continuité uniforme de $f*g$.

iii) Soient f et g dans $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ et $x \notin \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$. Alors pour tout $y \in \text{supp}(g)$, $x - y \notin \text{supp}(f)$; par suite $f(x-y) = 0$ et donc $f*g(x) = 0$ *i.e.* $\text{supp}(f*g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$.

De ce qui précède on voit que si f et g sont à support compacts, $\text{supp}(f)+\text{supp}(g)$ est aussi compact ; donc $f*g$ est à support compact. □

Exercice VI. 5.5

Pour tout nombre complexe $z = \alpha + i\beta$, la partie réelle de iz est égale à $-\beta$; d'où $z = \mathcal{R}z - i\mathcal{R}(iz)$. Comme $\mathcal{R}(if(x)) = \mathcal{R}f(ix) = u(ix)$ en posant $z = f(x)$ on obtient pour tout $x \in E$: $f(x) = u(x) - iu(ix)$. Ce qui prouve l'identité.

Comme pour tout $x \in E$, $|u(x)| \leq |f(x)|$ on a $|||u||| \leq |||f|||$. D'autre part, pour tout $x \in E$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| = e^{i\theta}f(x)$. Comme $f(e^{i\theta}x)$ est réel on a

$$|f(x)| = f(e^{i\theta}x) = u(e^{i\theta}x).$$

Mais

$$f(e^{i\theta}x) = u(e^{i\theta}x) \leq |||u||| \cdot ||e^{i\theta}x|| = |||u||| \cdot ||x||.$$

Ceci implique $|||f||| \leq |||u|||$. Donc $|||u||| = |||f|||$. □

Exercice VI. 5.6

i) L'évaluation $\langle \delta_a^{n+1}, \varphi\rangle$ n' a de sens que si φ est dérivable jusqu'à l'ordre $n+1$ en a. Or il existe des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas $(n+1)$-fois dérivables en a. La distribution δ_a^{n+1} ne peut donc pas s'étendre à l'espace $\mathcal{D}^n(\mathbb{R})$ *i.e.* ne peut pas être d'ordre n.

ii) D'abord, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la somme $\langle \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{a_n}^n, \varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(a_n)$ est finie ; donc la somme des $\delta_{a_n}^n$ définit bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrons qu'elle est continue. Soit (φ_k) une suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tendant vers 0. Cela signifie qu'il existe un compact fixe K de $\mathbb{R}$ tel que

- $\text{supp}(\varphi_k) \subset K$ pour tout k ;
- pour tout $r \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre r de φ_k tend vers 0 uniformément quand k tend vers l'infini.

Comme la suite (a_n) tend vers l'infini, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > N$, $a_n \notin K$. La somme $\sum_{n=0}^{N} \varphi_k^{(n)}(a_n)$ converge donc vers 0 quand $k \to +\infty$. □

Exercice VI. 5.7

i) L'espace V_2 (resp. V_1) est le noyau de l'application $p_1 \circ \Theta^{-1}$ (resp. $p_2 \circ \Theta^{-1}$) où p_1 (resp. p_2) est la première projection $p_1 : (x_1, x_2) \longmapsto x_1$ (resp. est la deuxième projection $p_2 : (x_1, x_2) \longmapsto x_2$) et Θ l'isomorphisme topologique qui à $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ associe $x_1 + x_2 \in E$. Donc V_2 et V_1 sont fermés.

ii) Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de V_1. Pour tout $i = 1, \dots, n$ l'application f_i qui à $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V_1$ associe $\lambda_i \in \mathbb{K}$, est une forme linéaire continue sur V_1. D'après le théorème de Hahn-Banach elle se prolonge en une forme linéaire continue φ_i sur E ; par suite l'identité de V_1, qui est définie par les f_i, se prolonge en l'application linéaire continue $\Phi : E \longrightarrow V_1$ définie par $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) v_i$.

iii) Posons $V_2 = \text{Ker } \Phi$. Alors V_2 est un sous-espace fermé de E et l'application linéaire $\Theta : (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \longrightarrow x_1 + x_2 \in E$ est continue, bijective et admet pour inverse $\Theta^{-1}(x) = (\Phi(x), x - \Phi(x))$. Ce qui démontre que V_2 est bien un supplémentaire topologique de V_1. □

Exercice VI. 5.8

i) Comme $(E, || \ ||_\infty)$ est complet il suffit de montrer que M est fermé dans $(E, || \ ||_\infty)$. Soit (f_n) une suite dans M qui converge vers $f \in E$ pour la norme $|| \ ||_\infty$. Comme $|| \ ||_2 \leq || \ ||_\infty$, (f_n) converge vers f pour $|| \ ||_2$; mais M est fermé (car complet) dans $(E, || \ ||_2)$, donc $f \in M$. Par suite $(M, || \ ||_\infty)$ est complet.

ii) Les espaces $(M, || \ ||_\infty)$ et $(M, || \ ||_2)$ sont complets et l'application identité $(M, || \ ||_\infty) \longrightarrow (M, || \ ||_2)$ est continue ; les normes $|| \ ||_\infty$ et $|| \ ||_2$ sont donc équivalentes sur M d'après le théorème de Banach-Schauder.

iii) Il est clair que si la suite (f_n) converge vers 0 pour la norme $|| \ ||_\infty$, pour tout $x \in [0, 1]$ la suite des nombres compexes $f_n(x)$ converge vers 0. Pour x fixé, la forme linéaire $f \in M \longmapsto f(x) \in \mathbb{C}$ est donc continue.

iv) Soit $x \in [0, 1]$; notons φ_x la forme linéaire continue sur M qui à f associe $f(x)$. Comme la suite (f_n) est bornée (elle est dans B_∞ donc dans une partie bornée de B_2 puisque les normes $|| \ ||_2$ et $|| \ ||_\infty$ sont équivalentes sur M) on peut en extraire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ convergeant faiblement vers une fonction $f \in M$. En particulier pour tout x, $f_{n_k}(x) = \varphi_x(f_{n_k})$ converge vers $f(x) = \varphi_x(f)$ *i.e.* la suite $(f_{n_k})_k$ converge simplement vers f.

v) Posons $h_{n_k} = |f_{n_k} - f|^2$. Alors (h_{n_k}) converge simplement vers 0 ; pour tout $x \in [0, 1]$ on a $h_{n_k}(x) \leq 4$ puisque la suite $(f_{n_k})_k$ avec sa limite simple f sont dans B_∞. Comme la fonction constante égale à 4 est intégrable sur $[0, 1]$, le théorème de Lebesgue nous dit que la suite $\left(\int_0^1 h_{n_k}(x)dx\right)$ converge vers 0 *i.e.* la suite $(||f_{n_k} - f||_2)$ converge vers 0 ou encore que f est la limite de (f_{n_k}) pour la norme $|| \ ||_2$.

vi) La boule B_∞ est contenue dans une boule homothétique de B_2. Dans la question v) on a exactement montré que B_∞ est compacte pour $|| \ ||_2$; donc elle est aussi compacte pour $|| \ ||_\infty$.

vii) La boule unité B_∞ de $(M, || \ ||_\infty)$ est compacte ; d'après le théorème de Riesz, M est de dimension finie. □

Chapitre VII

Exercice VII. 4.1

- Supposons $k = 1$. Comme $\text{Ker} f_1 \subset \text{Ker} f$, f_1 et f induisent des formes linéaires sur le quotient $E/\text{Ker} f$. Comme ce quotient est un espace vectoriel de dimension 1 toutes ses formes linéaires sont proportionnelles ; il existe donc un scalaire λ_1 tel que $f = \lambda_1 f_1$.

- Supposons $f_1, \dots, f_k$ linéairement indépendantes et que l'assertion est vraie pour $p \leq k-1$. On peut trouver des vecteurs $e_1, \dots, e_k$ tels que $f_i(e_j) = \delta_i^j$. En effet, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, la forme f_i est non nulle sur l'espace

$$E_i = \bigcap_{j \neq i} \mathrm{Ker} f_i$$

car sinon l'hypothèse de récurrence impliquerait que f_i est une combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_k$, ce que nous avons exclu. On peut donc trouver $e_i \in E_i$ tel que $f_i(e_i) = 1$ et bien sûr $f_j(e_i) = 0$ pour $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, k\}$.

Tout $x \in E$ peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=1}^k f_i(x)e_i + z$. En évaluant la forme f_i sur x, on obtient

$$f_i(x) = f_i(f_1(x)e_1 + \dots + f_k(x)e_k) + f_i(z) = f_i(x) + f_i(z)$$

qui implique $f_i(z) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$ *i.e.* $z \in \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Ker} f_i$. Par suite $z \in \mathrm{Ker} f$. Donc $f(x) = \sum_{i=1}^k f(e_i) f_i(x)$. En posant $\lambda_i = f(e_i)$ pour $i = 1, \dots, k$, on obtient $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$.

- Si les formes $f_1, \dots, f_k$ ne sont pas linéairement indépendantes on prend une base $(f_{i_1}, \dots, f_{i_s})$ du sous-espace vectoriel du dual de E engendré par $f_1, \dots, f_k$. Alors

$$\bigcap_{j=1}^{s} \mathrm{Ker} f_{i_j} \subset \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} f_i \subset \mathrm{Ker} f.$$

Donc il existe $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_s}$ tels que $f = \lambda_{i_1} f_{i_1} + \dots \lambda_{i_k} f_{i_k}$. D'où $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$ avec

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda_{i_j} & \text{si } i = i_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Exercice VII. 4.2

i) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $f^{-1}([\alpha, +\infty[) = \left(f^{-1}(]-\infty, \alpha[)\right)^c$ où pour tout $A \subset \mathbb{R}$, A^c désigne son complémentaire. On voit alors que $f^{-1}([\alpha, +\infty[)$ est fermé si, et seulement si, $f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ est ouvert. Ce qui démontre l'équivalence cherchée. Le raisonnement est le même pour la semi-continuité inférieure.

ii) Il est clair que si f est continue, elle est semi-continue supérieurement et inférieurement. Démontrons la réciproque. Il suffit de montrer que pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(I)$ est ouvert. Mais I ne peut être que de trois types

$$]-\infty, \beta[, \quad ,]\alpha, \beta[\quad \text{ou} \quad]\alpha, +\infty[.$$

Pour le premier on utilise la semi-continuité supérieure, pour le troisième la semi-continuité inférieure et pour le deuxième on utilise les deux et le fait que

$$\begin{aligned} f^{-1}(]\alpha, \beta[) &= f^{-1}(]-\infty, \beta[\cap]\alpha, +\infty[) \\ &= f^{-1}(]-\infty, \beta[) \cap f^{-1}(]\alpha, +\infty[). \end{aligned}$$

iii) Nous allons faire le raisonnement pour l'enveloppe inférieure $\underline{f}$; le cas de l'enveloppe supérieure se fait exactement de la même manière. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\underline{f}^{-1}(]-\infty,\alpha[) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(]-\infty,\alpha[).$$

En effet l'inclusion $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(]-\infty,\alpha[) \subset \underline{f}^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ est évidente. Soit $x \in \underline{f}^{-1}(]-\infty,\alpha[)$. Comme $\underline{f}(x) = \inf_{i\in I} f_i(x)$ et $\underline{f}(x) < \alpha$, il existe $i \in I$ tel que $\underline{f}(x) \leq f_i(x) < \alpha$, c'est-à-dire $x \in f_i^{-1}(]-\infty,\alpha[)$. Ce qui démontre l'égalité annoncée. Comme $f_i^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ est ouvert pour tout $i \in I$, $\underline{f}^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ sera aussi ouvert ; ce qui établit la semi-continuité supérieure de $\underline{f}$.

□

Exercice VII. 4.3

i) On a toujours $|e'_n(x)| \leq ||x||_2$; donc $|||e'_n||| \leq 1$. Comme $|e'_n(e_n)| = 1$ on a $|||e'_n||| = 1$ et donc $|||ne'_n||| = n$.

ii) Soit $x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i e_i \in E$. Alors $\langle x, ne'_n\rangle = \sum_{i=1}^{s} n\lambda_i\langle e_i, e'_n\rangle \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ce qui montre que la suite (ne'_n) tend faiblement vers 0, donc elle est faiblement bornée.

iii) On remarque que la suite (ne'_n) est faiblement bornée mais non bornée. Dans un espace normé non complet il n'y a donc pas, en général, équivalence entre les propriétés "faiblement borné" et "borné". □

Exercice VII. 4.4

Pour montrer que $u' : F' \longrightarrow E'$ est continue, il suffit de montrer qu'elle est bornée sur la boule unité de F'. On a pour tout $x \in E$ et toute $f' \in F'$

$$|\langle x, u'(f')\rangle| = |\langle u(x), f'\rangle| \leq |||f'||| \cdot |||u||| \cdot ||x||.$$

Donc $|||u'(f')||| \leq |||u||| \cdot |||f'|||$ et par suite $\sup_{|||f'|||\leq 1} |||u'(f')||| \leq |||u|||$. Ce qui montre la continuité de u' et donne en même la majoration $|||u'||| \leq |||u|||$.

Comme u n'est pas nulle, il existe $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$. Posons $y_0 = \frac{u(x)}{||u(x)||}$ qui est un vecteur de F de norme 1. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un élément $f' \in F'$ tel que $|||f'||| = 1$ et $\langle y_0, f'\rangle = 1$. Ce qui implique $\langle u(x), f'\rangle = ||u(x)||$. On aura donc

$$\begin{aligned} ||u(x)|| &= \langle u(x), f'\rangle \\ &= \langle x, u'(f')\rangle \\ &\leq |||u'(f')||| \cdot ||x|| \\ &\leq |||u'||| \cdot |||f'||| \cdot ||x|| = |||u'||| \cdot ||x||. \end{aligned}$$

i.e. $|||u||| \leq |||u'|||$. On a donc bien l'égalité $|||u'||| = |||u|||$. □

Exercice VII. 4.5

i) Soit $\mathcal{S}$ la topologie engendrée par les familles $u_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$. Il est clair que $\mathcal{S}$ rend continues toutes les applications u_i ; donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Comme $\mathcal{T}$ doit contenir tous les éléments de la forme $u_i^{-1}(U_i)$ où U_i est un ouvert de X_i, elle contient évidemment $\mathcal{S}$; donc $\mathcal{T} = \mathcal{S}$.

ii) Si $f : E \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ est continue, alors pour tout $i \in I$, l'application $u_i \circ f : E \longrightarrow X_i$ est continue. Supposons que pour tout $i \in I$, $u_i \circ f$ est continue. Soit $\mathcal{S}$ la topologie la plus fine sur X rendant f continue. Alors $\mathcal{S}$ rend continues les u_i car si U_i est un ouvert de X_i, $f^{-1}\left(u_i^{-1}(U_i)\right) = (u_i \circ f)^{-1}(U_i)$ est ouvert dans E ; donc $u_i^{-1}(U_i)$ est ouvert (pour $\mathcal{S}$) dans X par définition de $\mathcal{S}$; donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Par suite l'application $f : E \xrightarrow{f} (X, \mathcal{S}) \xrightarrow{id} (X, \mathcal{T})$ est continue. □

Exercice VII. 4.6

i) Soient x' et y' dans $A^{\perp}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $a \in A$. Alors $\langle x'+y', a\rangle = \langle x', a\rangle + \langle y', a\rangle = 0$ et $\langle a, \lambda x'\rangle = \lambda\langle a, x'\rangle = 0$. Ce qui montre que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E'.

Soit (x'_n) une suite dans $A^{\perp}$ convergeant (pour la topologie de la norme) vers $x' \in E'$. Alors cette suite converge vers x' pour la topologie faible ; donc

$$\langle a, x'\rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle a, x'_n\rangle = 0$$

par suite $A^{\perp}$ est fermé dans E'.

ii) L'application j' associe à toute forme linéaire continue sur E sa restriction à V. Elle est surjective ; en effet si v' est une forme linéaire continue sur V, v' se prolonge, d'après le théorème de Hahn-Banach, en une forme linéaire continue x' sur E telle que $|||x'||| = |||v'|||$. Soit u' une forme linéaire sur E/V telle que $\pi'(u') = 0$. Cela signifie que pour tout $x \in E$, $u'(\pi(x)) = 0$; comme π est surjective u' est nulle sur l'espace E/V tout entier. Ce qui montre que π' est injective.

Montrons que Ker j' = Im π'. Soit $y' \in E'$ telle que $y' = \pi'(u')$ avec $u' \in (E/V)'$. Alors pour tout $v \in V$ on a

$$\langle v, y'\rangle = \langle v, \pi'(u')\rangle = \langle \pi(v), u'\rangle = \langle 0, u'\rangle = 0$$

c'est-à-dire que la restriction de y' à V est nulle ; autrement dit $j'(y') = 0$. Soit maintenant $y' \in$ Ker j'. Alors la restriction de y' à V est nulle, donc y' définit par passage au quotient, une forme linéaire continue u' telle que $j' = y' \circ \pi$ *i.e.* $j' = \pi'(u')$. Ce qui montre bien que Ker j' = Im π'.

iii) De manière évidente le dual $(E/V)'$ de E/V est l'espace des formes linéaires continues sur E qui sont nulles sur V et il est isométrique à $V^{\perp}$. Comme la suite

$$0 \longrightarrow V^{\perp} \xrightarrow{\pi'} E' \xrightarrow{j'} V' \longrightarrow 0$$

(où les flèches π' et j' sont des "isométries") est exacte, le dual V' de V est donc isométrique à $E'/V^{\perp}$.

iv) Comme V est fermé dans E réflexif, il s'identifie à son biorthogonal $(V^{\perp})^{\perp}$. D'autre part, d'après ce qui précède, V' s'identifie à $E'/V^{\perp}$; par suite V'' s'identifie à $\left(E'/V^{\perp}\right)'$ lequel s'identifie à $(V^{\perp})^{\perp}$; ce qui montre que V est réflexif. De la même manière $(E/V)''$ s'identifie à $E''/(V^{\perp})^{\perp}$ qui n'est rien d'autre que E/V puisque E est réflexif par hypothèse et V l'est par ce qu'on vient de voir. Donc E/V est réflexif. □

Exercice VII. 4.7

Soit $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$; alors la somme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n)$ est finie car le support de φ ne contient qu'un nombre fini d'entiers relatifs. La linéarité est triviale.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ soit φ_p la fonction définie par

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \cup [p+1, +\infty[\\ \frac{1}{p} & \text{si } x \in [1, p[\\ \frac{1}{p}x & \text{si } x \in]0, 1[\\ \frac{1}{p}(-x+p+1) & \text{si } x \in [p, p+1[. \end{cases}$$

Alors $\varphi_p \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ et $||\varphi_p||_\infty = \frac{1}{p} \to 0$ mais $\langle \varphi_p, T \rangle = \sum_{n=1}^{p} \varphi(n) = \frac{1}{p} \times p = 1$. La forme linéaire T n'est donc pas continue sur $\mathcal{K}(\mathbb{R})$. □

Exercice VII. 4.8

i) Soient $S : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ une subdivision de $[0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $i \in \{1, \ldots n\}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leq |\varphi(t_i) - \varphi_k(t_i)| + |\varphi_k(t_i) - \varphi_k(t_{i-1})| + |\varphi_k(t_{i-1}) - \varphi(t_{i-1})|.$$

Pour k assez grand : $\sup_{0 \leq t \leq 1} |\varphi(t) - \varphi_k(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2n}$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi_k(t_i)| + \sum_{i=1}^{n} |\varphi_k(t_i) - \varphi_k(t_{i-1})| \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} |\varphi_k(t_{i-1}) - \varphi(t_{i-1})| \\ &\leq n\frac{\varepsilon}{2n} + C + n\frac{\varepsilon}{2n} \\ &\leq C + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $V_S(\varphi) \leq C$ *i.e.* φ est à variation bornée.

ii) Soient $\varepsilon > 0$ et $S : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ la subdivision donnée par $t_i = \frac{i}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$|I_n(f_k, \varphi) - I_n(f, \varphi)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_k(t_i) - f(t_i)| \cdot |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|.$$

Comme pour k asssez grand, on a $\sup_{t \in [0,1]} |f_k(t) - f(t)| \leq \varepsilon$, l'inégalité devient

$$|I_n(f_k, \varphi) - I_n(f, \varphi)| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|.$$

On fait tendre n vers l'infini et on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_k(x) d\varphi(x) - \int_0^1 f(x) d\varphi(x) \right| &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \\ &\leq \varepsilon V(\varphi) \end{aligned}$$

qui montre bien que $\int_0^1 f_k(x)d\varphi(x)$ tend vers $\int_0^1 f(x)d\varphi(x)$ quand $k \to +\infty$. □

Exercice VII. 4.9

i) Soit (f_k) une suite de fonctions dans $\mathcal{E}$ convergeant vers $f \in \mathcal{B}$ au sens de la norme $\| \ \|$. Montrons que $f \in \mathcal{E}$. Soient $x_0 \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$. On a

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)|.$$

Il existe k_0 (indépendant de $x \in [0,1]$) tel que :

$$k \geq k_0 \Longrightarrow \begin{cases} |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{et} \\ |f(x_0) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

D'autre part, comme f est continue, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc pour $|x - x_0| < \eta$ on a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *i.e.* f est continue ; ce qui montre bien que $\mathcal{E}$ est fermé dans $\mathcal{B}$.

ii) La fonction u_t ne prend que les valeurs 0 ou 1 ; elle est donc bornée *i.e.* pour tout $t \in [0,1]$, $u_t \in \mathcal{B}$.

iii) Soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ une subdivision de l'intervalle $[0,1]$. Posons

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(t_i) \geq \varphi(t_{i-1}) \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| &= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \{\widetilde{F}(u_{t_i}) - \widetilde{F}(u_{t_{i-1}})\} \\ &= \widetilde{F}\left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i (u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right) \end{aligned}$$

Or

$$(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_{i-1} \leq x < t_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons

$$I_+ = \bigcup_{\varepsilon_i = 1} [t_{i-1}, t_i[\quad \text{et} \quad I_- = \bigcup_{\varepsilon_i = -1} [t_{i-1}, t_i[$$

Alors $I_+ \cup I_- = [0,1]$ et

$$\zeta(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (u_{t_i} - u_{t_{i-1}})(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I_+ \\ -1 & \text{si } x \in I_- \end{cases}$$

D'où $\sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leq |||\widetilde{F}||| \cdot ||\zeta|| \leq |||\widetilde{F}|||$ qui montre bien que φ est à variation bornée.

iv) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On a

$$u_{t_i}(x) - u_{t_{i-1}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_{i-1} \leq x < t_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $f_n(x) = f(t_i)$ sur $[t_{i-1}, t_i[$ et $f_n(1) = f(1)$. La fonction f_n est donc une fonction en escalier.

v) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue (car continue sur un compact), il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ pour $|x - x'| < \eta$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \eta$ et posons $t_i = \frac{i}{n}$ pour $i = 0, 1, \dots, n$. Alors, pour tout $x \in [t_{i-1}, t_i[$

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(t_i)|.$$

Comme $|t_i - t_{i-1}| = \frac{1}{n} < \eta$ on a, pour tout $x \in [t_{i-1}, t_i[$, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ et donc, pour tout $x \in [t_{i-1}, t_i[$, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ *i.e.* (f_n) converge vers f uniformément (c'est-à-dire pour la norme $|| \ ||$).

vi) On a

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(f_n) &= \widetilde{F}\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \widetilde{F}(u_{t_i} - u_{t_{i-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \left(\widetilde{F}(u_{t_i}) - \widetilde{F}(u_{t_{i-1}})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})). \end{aligned}$$

vii) D'après ce qui précède $\widetilde{F}(f_n) = I_n(f, \varphi)$. Comme f est continue et φ est à variation bornée, $I_n(f, \varphi)$ converge vers $\int_0^1 f(x) d\varphi(x)$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \widetilde{F}(f_n) = \int_0^1 f(x) d\varphi(x).$$

viii) Comme (f_n) converge vers f pour la norme $|| \ ||$ et que la restriction de $\widetilde{F}$ à $\mathcal{E}$ est F on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$

$$F(f) = \int_0^1 f(x) d\varphi(x)$$

i.e. la forme linéaire continue F sur $\mathcal{E}$ est représentée par une l'intégrale de Stieltjes par rapport à la fonction à variation bornée φ. □

Chapitre VIII

Exercice VIII. 6.1

Dans cet exercice, il s'agit de trouver une application bilinéaire symétrique g sur E telle que pour tout $x \in E$ on ait $||x||^2 = g(x,x)$. Si une telle application existe, elle sera forcément définie positive. Pour tous $x, y \in E$ posons

$$g(x,y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2).$$

Il est clair que g ainsi définie est symétrique et qu'elle vérifie $g(x,x) = ||x||^2$ pour tout $x \in E$. Reste à établir la bilinéarité de g ; par symétrie, il suffit de le faire par rapport à la première variable. Posons pour tous x, x' et y dans E

$$f(x,x',y) = 4(g(x+x',y) - g(x,y) - g(x',y)).$$

Dire que g est additive par rapport à x, c'est dire que f est identiquement nulle. C'est ce que nous allons démontrer. On a par définition de g

$$(*) \qquad \begin{aligned} f(x,x',y) =& ||x+x'+y||^2 - ||x+x'-y||^2 - ||x+y||^2 \\ &+ ||x-y||^2 - ||x'+y||^2 + ||x'-y||^2 \end{aligned}$$

D'après l'identité du parallélogramme on a

$$||x+x'+y||^2 = 2(||x+y||^2 + ||x'||^2) - ||x+y-x'||^2$$

et

$$||x+x'-y||^2 = 2(||x-y||^2 + ||x'||^2) - ||x-y-x'||^2.$$

L'égalité $(*)$ devient alors

$$(**) \qquad \begin{aligned} f(x,x',y) =& - ||x+y-x'||^2 + ||x-y-x'||^2 + ||x+y||^2 \\ &- ||x-y||^2 + ||x'-y||^2 - ||x'+y||^2. \end{aligned}$$

La somme membre à membre des égalités $(*)$ et $(**)$ donne

$$\begin{aligned} 2f(x,x',y) =& \left(||x'+y+x||^2 + ||x'+y-x||^2\right) \\ &- \left(||x'-y+x||^2 + ||x'-y-x||^2\right) \\ &+ 2\left(||x'-y||^2 - ||x'+y||^2\right). \end{aligned}$$

L'égalité du parallélogramme, appliquée au premier et au deuxième termes du deuxième membre, donne finalement

$$\begin{aligned}2f(x,x',y) =& 2\left(||x'+y||^2+||x||^2\right)\\ &-2\left(||x'-y||^2+||x||^2\right)+2\left(||x'-y||^2-||x'+y||^2\right)\\ =&0.\end{aligned}$$

Démontrons l'homogénéité (toujours par rapport à la première variable). Soient $x, y \in E$. On a

$$g(2x,y) = g(x,y) + g(x,y) = 2g(x,y).$$

En répétant cette opération on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(nx,y) = ng(x,y)$. Comme $g(-x,y) = -g(x,y)$ (immédiat par définition de g) on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g(nx,y) = ng(x,y)$. En écrivant $x = n.(\frac{x}{n})$ pour $n \geq 1$ et en appliquant ce qui précède on trouve $g(x,y) = ng(\frac{x}{n},y)$ et donc $g(\frac{1}{n}x,y) = \frac{1}{n}g(x,y)$. Par suite pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ on a

$$g\left(\frac{p}{q}x,y\right) = \frac{p}{q}g(x,y).$$

Fixons $y \in E$. Alors les applications $\tau_y : x \in E \longmapsto ||x+y|| \in \mathbb{R}_+$ et $\tau_{-y} : x \in E \longrightarrow ||x-y|| \in \mathbb{R}_+$ sont continues, donc l'application $g(\cdot,y) : x \in E \longmapsto g(x,y) \in \mathbb{R}$ est aussi continue. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; alors λ est limite d'une suite de rationnels r_n. On aura

$$g(\lambda x,y) = g((\lim r_n)x,y) = \lim_{n\to+\infty} g(r_n x,y) = (\lim_{n\to+\infty} r_n)g(x,y) = \lambda g(x,y).$$

Ceci termine la démonstration de la linéarité de g par rapport à x. □

Exercice VIII. 6.2

Soient E un espace de Hilbert, V un sous-espace fermé de E et $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Comme V est complet, il est de Hilbert ; il existe donc $y \in V$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \langle x,y\rangle$ avec $|||f||| = ||y||$. Il est clair que la forme linéaire continue $\widetilde{f}$ sur E définie pour tout $x \in E$ par $\widetilde{f}(x) = \langle x,y\rangle$ prolonge f et bien sûr a même norme. □

Exercice VIII. 6.3

Soit M une partie totalement bornée de E. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, M admet un ε-réseau fini, en particulier elle admet un 1-réseau fini A. Pour tout $x \in M$, il existe donc $a \in A$ tel que $m \in B(a,1)$ (boule de rayon 1 centrée en a). D'où

$$M \subset \bigcup_{a\in A} B(a,1).$$

Comme A est fini, M est nécessairement bornée.

ii) Remarquons d'abord que si $N \subset M$ et si M est totalement bornée, il en est de même de N. Pour montrer que dans $\mathbb{R}^n$ toute partie bornée est totalement bornée il suffit donc de le faire pour $M = I_R \times \ldots \times I_R$ (n fois) où I_R est l'intervalle

$[-R, +R]$ avec $R > 0$. Soit $\varepsilon > 0$; on divise M en hypercubes dont l'arête a une mesure $a \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Les sommets de ce cube donnent alors un ε-réseau fini pour M.

iii) Il suffit de démontrer que la sphère infinie $\mathbb{S}^\infty$ de ℓ^2 contient une partie M non totalement bornée. Prenons pour M une partie infinie $\{m_k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ telle que $\delta = \inf_{k,\ell} ||m_k - m_\ell|| > 0$ (par exemple pour $k \in \mathbb{N}^*$, $m_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) =$ $k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique). Soit $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$. Comme les boules $B(m_k, \varepsilon)$ sont deux à deux disjointes, tout ε-réseau A pour M est nécessairement infini puisque toute boule $B(m_k, \varepsilon)$ doit contenir au moins un élément de A. La partie M ne peut donc être totalement bornée ; par suite $\mathbb{S}^\infty$ ne l'est pas non plus.

iv) On a admis que dans un espace métrique complet toute partie fermée totalement bornée est compacte (*cf.* [KF]). Il suffit donc de montrer que Π est totalement borné. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Longrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soient V le sous-espace de dimension finie de ℓ^2 engendré par les N premiers vecteurs de la base canonique et $P : E \longrightarrow V$ la projection orthogonale. Alors pour tout $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \Pi$ on a

$$||x - Px|| = \sqrt{\sum_{N+1}^{\infty} x_n^2} \leq \sqrt{\sum_{N}^{\infty} \frac{1}{2^k}} \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme V est de dimension finie et que Π est borné, $P(\Pi)$ est totalement borné. Il admet donc un $\frac{\varepsilon}{2}$-réseau fini A. Soit $x \in \Pi$; alors il existe $a \in M$ tel que

$$||Px - a|| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ce qui donne $||x - a|| \leq ||x - Px|| + ||Px - a|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ *i.e.* A est un ε-réseau fini pour Π. Le parallélipipède de Hilbert Π est donc un ensemble compact. □

Exercice VIII. 6.4

i) L'inclusion $E_\rho \subset E_{\rho'}$ est évidente. Nous allons construire une fonction $\rho < 1$ telle que E_1 soit strictement inclus dans E_ρ. Pour tout $t \in [-1, +1]$ posons

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors il est facile de voir que la fonction $\rho : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi définie est mesurable (elle est même de classe C^∞), strictement inférieure à 1 et strictement positive sur un ensemble de mesure totale. Soit $f : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors la fonction $\rho(t)|f(t)|^2 = \frac{e^{-\frac{1}{t^2}}}{t^2}$ est définie continue sur $[-1, +1]$, donc intégrable et par suite $f \in E_\rho$. Mais il est clair que $f \notin E_1$; ce qui montre que l'inclusion $E_1 \subset E_\rho$ est stricte.

ii) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions dans $C^0([-1,+1],\mathbb{C})$ définies par

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \\ nt & \text{si } t \in]-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}[. \end{cases}$$

Cette suite de fonctions converge (pour la norme L^2 bien sûr) vers la fonction mesurable de carré intégrable

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \leq 0 \\ +1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Mais φ n'est pas continue et sa classe dans $L^2([-1,+1],\mathbb{C})$ ne contient aucune fonction continue ; donc $C^0([-1,+1],\mathbb{C})$ n'est pas fermé dans $L^2([-1,+1],\mathbb{C})$. □

Exercice VIII. 6.5

i) D'abord si $y \in E$, la forme linéaire $f_y : x \in E \longmapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ est continue ; donc son noyau est fermé. Par suite

$$M^\perp = \{x \in E : \forall y \in M, \langle x, y\rangle = 0\} = \bigcap_{y\in M} \mathrm{Ker} f_y$$

est fermé. Il résulte immédiatement de cette remarque et de la propriété de la relation d'orthogonalité que $(M^\perp)^\perp = M$.

ii) Le résultat n'est évidemment pas vrai puisque la fermeture de M est nécessaire pour être l'orthogonal d'une partie. □

Exercice VIII. 6.6

i) Comme la suite $\lambda = (\lambda_k)$ est bornée (par 1), la série $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k x_k y_k$ est convergente pour tous $x = (x_k)$ et (y_k) dans E et définit une forme bilinéaire sur E. D'autre part, comme tous les réels λ_k sont strictement positifs, cette forme bilinéaire est définie positive ; c'est donc un produit scalaire sur E. Mais E muni de ce produit scalaire (dont on notera $\|\ \|_\lambda$ la norme asociée pour la distinguer de la norme habituelle obtenue par $\lambda_k = 1$ pour tout k) n'est pas complet en général. En effet, supposons que la suite (λ_k) soit choisie de telle sorte que la série $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k$ converge. Considérons la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans E définie par

$$x^n = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ fois}}, 0, \dots)$$

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m \geq n$ par exemple (qui n'est nullement une restriction). Alors $\|x^n - x^m\|_\lambda = \sum_{k=n+1}^m \lambda_k$ qui montre que (x^n) est une suite de Cauchy (car la série définie par la suite des λ_k est convergente). Mais on voit bien que la suite (x^n) ne converge pas dans E pour la norme $\|\ \|_\lambda$. Donc $(E, \|\ \|_\lambda)$ n'est pas complet.

ii) Soit e le vecteur de E donné par $e = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, 0, \dots)$. Alors M n'est rien d'autre que l'orthogonal du sous-espace N engendré par e. Donc

$$E = M \oplus N = M \oplus \mathbb{K}e.$$

□

Exercice VIII. 6.7

Les trois points f, g et h dans $L^2(]-1,+1[,\mathbb{R})$ sont les sommets d'un triangle Δ. Soient α, β et γ ses angles respectifs. Calculons l'angle γ par exemple ; cet angle est formé par les vecteurs $u = f - h$ et $v = g - h$. Son cosinus est donc donné par

$$\cos\gamma = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

On a $\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{+1} x(x-1)dx$ et $||u||^2 = \int_{-1}^{+1} x^2 dx$ et $||v||^2 = \int_{-1}^{+1}(1-x)^2 dx$. Un calcul immédiat donne $\langle u, v\rangle = \frac{2}{3}$, $||u||^2 = \frac{2}{3}$ et $||v||^2 = \frac{8}{3}$. D'où $\cos\gamma = \frac{1}{2}$. Donc $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Le lecteur pourra remarquer que, comme la fonction $u(x) = -x$ est impaire, elle est orthogonale à $w(x) = g - f$ et donc $\alpha = \frac{\pi}{2}$; par suite $\beta = \frac{\pi}{3}$. Ce qui termine le calcul des angles. □

Exercice VIII. 6.8

Soit $x \in E$; alors la distance de x à $V^\perp$ n'est rien d'autre que la norme de la projection orthogonale $Px = \lambda a$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) sur V. On peut écrire x sous la forme $x = \lambda a + u$ où u est orthogonal à V (donc à a). On aura alors

$$\begin{aligned}\langle x, a\rangle &= \langle \lambda a + u, a\rangle \\ &= \lambda ||a||^2\end{aligned}$$

et donc $d(x, V^\perp) = |\lambda| \cdot ||a|| = \frac{|\langle x,a\rangle|}{||a||}$. □

Exercice VIII. 6.9

i) L'espace V n'est rien d'autre que le noyau de la forme linéaire continue

$$f \in E \longmapsto \langle f, 1\rangle \in \mathbb{R}.$$

C'est donc un hyperplan fermé de E.

ii) D'après l'exercice qui précède la distance de $f(x) = x^2$ à V n'est rien d'autre que le nombre réel $d(f, V) = \frac{|\langle f,1\rangle|}{||1||} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. □

Exercice VIII. 6.10

Le sous-espace V_n est le noyau de la forme linéaire continue

$$x \in \ell^2 \longmapsto \langle x, a\rangle \in \mathbb{K}.$$

où a est le vecteur de ℓ^2 dont les n premières composantes sont égales à 1 et les autres nulles. D'après ce qui précède, on a (puisque a est orthogonal à V_n)

$$d_n = d(x, V_n) = \frac{|\langle x, a\rangle|}{||a||} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

De façon claire $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$. □

Exercice VIII. 6.11

i) Soit $i \in I$; comme f_i est continue, la fonction $|f_i| : x \in X \longrightarrow |f_i(x)| \in \mathbb{R}_+$ est aussi continue et donc semi-continue inférieurement. Par suite la fonction

$$x \in X \longmapsto \sup_{i \in I} |f_i(x)|$$

est semi-continue inférieurement. L'ensemble $\mathcal{O}_n$ est donc ouvert.

<u>Premier cas</u> : il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{O}_N$ ne soit pas dense dans X.

ii) Dans ce cas, il existe un vecteur $x_0 \in X - \mathcal{O}_N$ et $\varepsilon > 0$ tels que la boule fermée $B(x_0, \varepsilon)$ soit entièrement contenue dans $X - \mathcal{O}_N$; autrement dit on a, pour tout $u \in X$ avec $||u|| \leq \varepsilon$

$$|f(x_0 + u)| \leq N.$$

iii) On a $f_i(u) = f_i((x_0 + u) - x_0) = f_i(x_0 + u) - f_i(x_0)$. D'où, pour tout $i \in I$ et tout $u \in X$ tel que $||u|| \leq \varepsilon$

$$|f_i(u)| \leq |f_i(x_0 + u)| + |f_i(x_0)| \leq 2N\cdot$$

On obtient alors

$$\sup_{||u|| \leq \varepsilon} |f_i(u)| = \varepsilon \sup_{||u|| \leq 1} |f_i(u)| \leq 2N.$$

et donc $\sup_{i \in I} |||f_i||| \leq \frac{2N}{\varepsilon}$.

<u>Deuxième cas</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{O}_n$ est dense dans X.

iv) On pose alors

$$\mathcal{O} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{O}_n$$

qui est G_δ partout dense dans X en vertu du théorème de Baire. Si $x \in \mathcal{O}$ on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) > n$ *i.e.* $f(x) = +\infty$.

<u>Conclusion</u> : on a donc établi le résultat suivant : *soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de formes linéaires continues sur un espace de Banach X. Alors une au moins, et une seulement, des conditions qui suivent est satisfaite.*

(1) *Il existe $M > 0$ tel que $|||f_i||| < M$ pour tout $i \in I$,*

(2) *il existe un G_δ dense $\mathcal{O}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{O}$, $|f(x)| = +\infty$.*

On sait que toute fonction $x \in X$ est la limite pour la norme $||\ ||_2$ de la somme partielle (de la série de Fourier de x) :

$$(1) \qquad S_n(x, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) P_n(\theta - t) dt \quad n \in \mathbb{N}^*$$

où

(2)
$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}.$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in X$

(3)
$$f_n(x) = S_n(x, \theta).$$

v) Le fait que f_n soit une forme linéaire sur X est évident. Montrons qu'elle est continue et estimons sa norme. On a

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= |S_n(x,\theta)| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)P_n(\theta - t)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)P_n(\theta - t)|\, dt \\
&\leq ||x||_\infty \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_n(\theta - t)|dt\right\} \\
&\leq ||P_n||_1 \cdot ||x||_\infty
\end{aligned}$$

qui montre bien que f_n est continue de norme $\leq ||P_n||_1$.

vi) En multipliant les deux membres de (2) par $e^{i\frac{t}{2}}$ puis par $e^{-i\frac{t}{2}}$ on obtient

$$e^{i\frac{t}{2}} P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{it(k+\frac{1}{2})} \ \text{ et } \ e^{-i\frac{t}{2}} P_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{it(k-\frac{1}{2})}$$

En faisant alors la différence membre à membre on obtient

$$\left(e^{i\frac{t}{2}} P_n(t) - e^{-i\frac{t}{2}} P_n(t)\right) = e^{it(n+\frac{1}{2})} - e^{-it(n+\frac{1}{2})}$$

c'est-à-dire $2i\sin\left(\frac{t}{2}\right) P_n(t) = 2i\sin\left(n + \frac{t}{2}\right) t$ qui donne bien la formule cherchée

(4)
$$P_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}.$$

vii) On a

$$\begin{aligned}
||P_n||_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_n(t)|dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\right| dt \\
&\geq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right| \frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|\frac{dt}{t} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin t|\frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi}\int_{n\pi}^{(n+1/2)\pi} |\sin t|\frac{dt}{t}\\ &\quad + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\frac{dt}{t}\\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\frac{dt}{t}\\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|dt\\ &\geq \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

qui montre bien que $||P_n||_1$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

viii) Remarquons d'abord que $g(t)$ est le "signe" de $P_n(\theta - t)$; on obtient donc $|P_n(\theta - t)| = g(t)P_n(\theta - t)$ et par suite

$$||P_n||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)P_n(\theta - t)dt.$$

La suite x_j peut être choisie telle que $||x_j||_\infty \leq 1$ pour tout j. On aura alors

$$|\varphi_j(t)| = |x_j(t)P_n(\theta - t)| \leq |P_n(\theta - t)|.$$

Comme $|\varphi_j|$ converge simplement vers $|P_n(\theta - t)| = g(t)P_n(\theta - t)$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{j\to+\infty} f_n(x_j) &= \lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x_j(t)P_n(\theta - t)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)P_n(\theta - t)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_n(\theta - t)|dt\\ &= ||P_n||_1.\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} |||f_n||| = \lim_{n\to+\infty} ||P_n||_1 = +\infty$.

ix) D'après ce qui précède et la conclusion qui suit la question iv), il existe une partie $\mathcal{O}$ de X qui est un G_δ dense dans X et telle que, pour tout $x \in \mathcal{O}$, on ait

$$\lim_{n\to+\infty} |S_n(x,\theta)| = +\infty.$$

Ceci signifie que, si on se donne $\theta \in \mathbb{R}$, alors il existe au moins une fonction $x \in X$ (en fait un G_δ de fonctions x, dense dans X) dont la série de Fourier ne converge pas vers x au point θ. □

Exercice VIII. 6.12

Remarque : Soit $f \in E$ et notons $\mathbf{1}$ la fonction identiquement égale à 1 et qui appartient, bien sûr, à E. Alors d'après l'inégalité de Hölder, la fonction $f \cdot \mathbf{1} = f$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ et on a $\int_0^{2\pi} |f(x)|dx \leq 2\pi \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ qui donne l'inégalité $N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|dx \leq ||f||$.

i) La linéarité de l'application $c_n : f \in E \longmapsto c_n(f) \in \mathbb{C}$ est immédiate. La continuité découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|c_n(f)| = |\langle f, e^{-inx}\rangle \leq ||f||$ qui montre bien que la norme $|||c_n||| \leq 1$. Un calcul immédiat montre que cette norme est atteinte pour $f(x) = 1$. Donc $|||c_n||| = 1$.

ii) Comme f est de carré intégrable, le carré de sa norme $||f||^2$ est égal, d'après l'égalité de Parseval, à la somme de la série convergente

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Donc $c_n(f)$ tend vers 0 quand $|n|$ tend vers $+\infty$.

iii) Soit $(X^k)_{k\geq 1}$ $(X^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{Z}})$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\mathbb{Z})$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $k, \ell \geq N \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n^k - x_n^\ell| < \varepsilon$. Donc pour n fixé, $(x_n^k)_{k\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$; elle converge donc ; notons x_n sa limite. Alors la suite X^k converge dans $L^\infty(\mathbb{Z})$ vers $X = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. En effet en passant à la limite pour ℓ tendant vers l'infini dans l'inégalité $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n^k - x_n^\ell| < \varepsilon$ on obtient $k \geq N \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n^k - x_n| < \varepsilon$ qui implique que $(x_n)_n$ est bornée et que la suite X_n converge vers X pour la norme $||\ ||_\infty$.

iv) Soit $(X^k)_{k\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{C}_0$ convergeant vers $X \in L^\infty(\mathbb{Z})$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geq N \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n^k - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|x_n| < |x_n^k| + \frac{\varepsilon}{2}$. Comme, d'autre part, $\lim_{|n|\to+\infty} x_n^k = 0$ pour $|n|$ suffisamment grand on aura $|x_n^k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ce qui donne $|x_n| < \varepsilon$, qui montre bien que $\lim_{|n|\to\infty} x_n = 0$ *i.e.* $X \in \mathcal{C}_0$.

v) L'application $\Psi : f \in E \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{C}_0$ est clairement bien définie et linéaire. Sa continuité résulte des relations qui suivent (déja établies) :

$$||\Psi(f)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| \leq N(f) \leq ||f||.$$

vi) L'égalité de Parseval donne $||f||^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$. Donc si $\Psi(f) = 0$, tous les $c_n(f)$ sont nuls ; par suite $f = 0$. Donc Ψ est injective.

vii) On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} N(f_k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right| dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{(2k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{\sin\left(\frac{x}{2k+1}\right)} \cdot \frac{2}{2k+1} dx \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité $\sin u \leq |u|$, valable pour tout $u \in \mathbb{R}$, au dernier terme on obtient finalement $N(f_k) \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{(2k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverge la suite de terme général

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{(2k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

tend vers $+\infty$ quand $k \to +\infty$ et donc $N(f_k) \to +\infty$. Ceci implique $||f_k|| \to +\infty$ en vertu de l'inégalité démontrée dans la remarque.

D'autre part on a $c_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } |n| > k \\ 1 & \text{si } |n| \leq k \end{cases}$ D'où $||\Psi(f_k)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

viii) D'après vii) l'inverse de l'application bijective $\Psi : E \longrightarrow \Psi(E)$ envoie la suite bornée $(\Psi(f_k))$ (pour la norme $|| \ ||_\infty$ dans $\mathcal{C}_0$) sur la suite non bornée (f_k) dans E ; elle n'est donc pas continue et par suite $\Psi : E \longrightarrow \mathcal{C}_0$ n'est pas ouverte.

ix) Les espaces E et $\mathcal{C}_0$ sont complets et l'application Ψ étant continue non ouverte, ne peut pas être surjective d'après le théorème de Banach-Schauder. □

Chapitre IX

Exercice IX. 5.1

i) Si φ est un difféomorphisme de classe C^1 de $[0,1]$ (*i.e.* φ est bijective dérivable et à dérivée continue ainsi que son inverse φ^{-1}) alors T_φ définit un opérateur borné sur E. En effet soit f une fonction mesurable sur $[0,1]$; alors

$$\int_{[0,1]} |f\circ\varphi(x)|^2 d\lambda(x) = \int_{[0,1]} |f(x)|^2 \cdot |(\varphi^{-1})'(x)| d\lambda(x).$$

Comme φ est un difféomorphisme de classe C^1, $(\varphi^{-1})'$ est bornée sur $[0,1]$. Par suite

$$\int_{[0,1]} |f\circ\varphi(x)|^2 d\lambda(x) \leq ||(\varphi^{-1})'||_\infty \left(\int_{[0,1]} |f(x)|^2 d\lambda(x)\right)$$

i.e.

$$||f\circ\varphi|| \leq \sqrt{||(\varphi^{-1})'||_\infty} \cdot ||f||.$$

Ceci montre que T_φ est bien défini et est borné sur E.

ii) Il y a des homéomorphismes φ de classe C^1 (l'inverse n'est pas forcément de classe C^1) de $[0,1]$ pour lesquels il existe $f \in E$ telle que $f\circ\varphi \notin E$. Par exemple si on prend $\varphi(x) = x^2$ et $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ avec $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$. Il est clair que $f \in E$ mais $f\circ\varphi(x) = \frac{1}{x^{2\alpha}}$ n'est pas dans E. □

Exercice IX. 5.2

i) Toute fonction $f \in E$ s'écrit de manière unique comme somme des fonctions

$$f_+(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad f_-(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

La fonction f_+ est paire et f_- est impaire. Ceci donne une décomposition de l'espace E en somme directe $E = P \oplus I$ où P est le sous-espace de E des fonctions

paires et I celui des fonctions impaires. L'opérateur T a donc deux valeurs propres 1 et -1 de sous-espaces propres respectifs P et I.

ii) D'abord S ne peut pas être injectif, puisque son image est de dimension finie, donc 0 est une valeur propre. Le sous espace propre associé est l'orthogonal de $A = \{\cos x, \sin x\}$ dans E pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Soient λ une valeur propre non nulle de S et $f \in E$ un vecteur propre associé à λ. On a $S(f) = \lambda f$; par suite f est dans l'image de S, donc est de la forme $f(x) = a\cos x + b\sin x$ avec a et b réels non tous nuls. Calculons $S(f)$. On a

$$\begin{aligned}
S(f)(x) =& \cos x \int_{-\pi}^{\pi} (\cos y)(a\cos y + b\sin y)dy \\
&- \sin x \int_{-\pi}^{\pi} (\sin y)(a\cos y + b\sin y)dy \\
=& a\cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y dy - b\sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 y dy \\
&+ (b\cos x - a\sin x) \int_{-\pi}^{\pi} \cos y \sin y dy \\
=& a\cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y dy - b\sin x \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 y)dy \\
=& (a\cos x + b\sin x) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 y dy - b\sin x \int_{-\pi}^{\pi} dy \\
=& \pi(a\cos x - b\sin x).
\end{aligned}$$

On doit avoir d'autre part

$$S(f)(x) = \lambda f(x) = \lambda(a\cos x + b\sin x) = \pi(a\cos x - b\sin x)$$

qui donne le système

$$\begin{cases} \lambda a &= \pi a \\ \lambda b &= -\pi b \end{cases}$$

L'examen de ce système donne deux solutions $\lambda = \pi$ ou $\lambda = -\pi$.. Le sous-espace propre associé à π est engendré par la fonction $\cos x$ et celui associé à $-\pi$ est engendré par la fonction $\sin x$. Le spectre de S est donc constitué de trois valeurs propres : π, $-\pi$ et 0. □

Exercice IX. 5.3

i) Soit $x \in N_k$; alors $S^k(x) = 0$, donc $S^{k+1}(x) = S(S^k(x)) = 0$ et par suite $x \in N_{k+1}$ *i.e.* $N_k \subset N_{k+1}$.

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N_k = N_{k+1}$; nous voulons alors établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_k = N_{k+n}$. Soit $x \in N_{k+n+1}$; alors $S^{k+1}(S^n(x)) = 0$; donc $S^n(x) \in N_{k+1}$. Mais $N_{k+1} = N_k$; donc $S^n(x) \in N_k$ et par suite $x \in N_{k+n}$. Ceci montre que $N_{k+n} = N_{k+n+1}$; on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_k = N_{k+n}$ dès que $N_k = N_{k+1}$.

ii) La démarche sera du même type que pour le i). Soit $x \in R_{k+1}$; alors il existe $y \in E$ tel que $x = S^{k+1}(y)$ qui peut ausi s'écrire $x = S^k(S(y))$; donc $x \in R_k$. La suite (R_k) est donc décroissante.

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $R_k = R_{k+1}$ et montrons qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_k = R_{k+n}$. Le résultat est vrai pour $n = 0, 1$; supposons le vrai pour n. Soit $x \in R_k$; alors $x \in R_{k+n}$ (hypothèse de récurrence) *i.e.* $x = S^{k+n}(y)$ pour un certain $y \in E$. Mais $S^k(y)$ est un élément de $R_k = R_{k+1}$; donc $S^k(y) = S^{k+1}(z)$ et par suite $x = S^n(S^k(y)) = S^n(S^{k+1}(z)) = S^{k+n+1}(z)$ *i.e.* $x \in R_{k+n+1}$. Ce qui donne $R_k = R_{k+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

iii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $S(N_{k+1}) \subset N_k$; en effet soit $x = S(y)$ avec $y \in N_{k+1}$. Alors $S^k(x) = S^k(S(y)) = S^{k+1}(y) = 0$. D'après la proposition IX. 4.2, la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est alors stationnaire. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, R_k est fermé, d'après le théorème IX. 4.3, le même raisonnement vaut pour la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On note p et q les plus petits entiers à partir desquels les suites (N_k) et (R_k) stationnent ; ce sont aussi les plus petits entiers k et ℓ tels que $N_{k+1} = N_k$ et $R_{\ell+1} = R_\ell$.

iv) Soit $x \in N_p \cap R_p$. Alors $S^p(x) = 0$ et $x = S^p(y)$ pour un certain $y \in E$. D'où $S^{2p}(y) = S^p(x) = 0$; donc $y \in N_{2p}$; mais $N_{2p} = N_p$, donc $S^p(y) = 0$ et par suite $x = 0$. On a finalement montré que $N_p \cap R_p = \{0\}$.

v) Soit $x \in E$; alors $S^q(x) \in R_q$. Mais $S^q(R_q) = R_{2q} = R_q$ et donc $S^q(x) \in S^q(R_q)$ *i.e.* $S^q(x) = S^q(y)$ pour un certain $y \in R_q$. Donc $x - y \in N_q$, c'est-à-dire $x = z + y$ avec $z = x - y \in N_q$ et $y \in R_q$. Ce qui établit l'égalité $E = N_q + R_q$.

vi) Si $q \leq p$, $N_q \subset N_p$ car la suite (N_k) est croissante ; si $q > p$, $N_q = N_p$ car (N_k) stationne à partir de p. Dans tous les cas on a $N_q \subset N_p$. De même si $q \leq p$, $R_q = R_p$ car (R_k) stationne à partir de q. Si $q > p$, $R_q \subset R_p$ car la suite (R_k) est décroissante.

Nous avons

$$\begin{cases} N_q \subset N_p \\ R_q \subset R_p \\ N_p \cap R_p = \{0\} \\ N_q + R_q = E \end{cases}$$

Ceci implique que $N_p = N_q$ et $R_p = R_q$; donc $p = q$.

vii) Comme la suite (N_k) est croissante, $N_1 = \mathrm{Ker}S \subset N_p = N$. D'où $\mathrm{Ker}S \cap R = \{0\}$; donc la restriction $S_{|R}$ de S à R est injective. C'est donc une bijection continue de R sur lui-même. C'est en fait un isomorphisme topologique d'après le corollaire IX. 4.4.

viii) Soit F un sous-espace de E stable par S et sur lequel S est nilpotent *i.e.* il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(S_{|F}\right)^k = 0$. Alors forcément $F \subset N_k$, donc $F \subset N$. Donc N est le plus grand sous-espace stable par S sur lequel S est nilpotent.

De même soit B un sous-espace stable par S sur lequel S est un automorphisme topologique. Alors $S(B) = B$ et par suite $S^k(B) = B$ pour tout $k \geq 1$. Donc $B \subset R_k$ pour tout $k \geq 1$ *i.e.* $B \subset \bigcap_k R_k$ qui montre que R est le plus grand sous-espace stable par S sur lequel S est un automorphisme topologique.

ix) Si S est injectif, tous les N_k sont réduits à $\{0\}$ et donc $N = \{0\}$. D'où $E = R$ *i.e.* S est surjectif. D'après viii) S est un automorphisme topologique de E. □

Exercice IX. 5.4

L'opérateur $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ est une isométrie ; sa norme est égale à 1 et donc son spectre $\sigma(T)$ sera inclus dans le disque unité fermé de $D(0,1)$. Montrons qu'en fait

$\sigma(T) = D(0,1)$. Soit $\lambda \in D(0,1)$. Il est facile de voir que $T - \lambda I$ est un opérateur injectif ; il n'y aura donc pas de valeur propre. D'autre part T n'est pas surjectif, donc $0 \in \sigma(T)$. Supposons λ non nul et montrons que $T - \lambda I$ ne peut pas être surjectif. Soit $y \in \ell^2$. Alors l'équation $T(x) - \lambda x = y$ est équivalente au système

$$\begin{cases} -\lambda x_1 & = y_1 \\ x_n - \lambda x_{n+1} & = y_{n+1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

dont la résolution donne

$$x_n = -\left(\frac{y_1}{\lambda^n} + \ldots + \frac{y_n}{\lambda}\right).$$

Soit y le vecteur de ℓ^2 donné par $y_1 = 1$ et $y_n = 0$ pour $n \geq 2$. Alors dans ce cas pour $n \geq 2$ on a $x_n = -\frac{1}{\lambda^n}$ dont le module reste constant égal à 1 si $|\lambda| = 1$ et tend vers $+\infty$ si $|\lambda| < 1$.

Donc pour tout $\lambda \in D(0,1)$, il existe $y \in E$ tel que l'équation $T(x) - \lambda x = y$ n'ait pas de solution dans l'espace ℓ^2. Le spectre est donc égal au disque fermé $D(0,1)$. □

Exercice IX. 5.5

i) L'opérateur T est de norme 1. En effet on a

$$\begin{aligned} ||T(f)||_\infty &= \sup_{x \in [0,1]} |xf(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = ||f||_\infty. \end{aligned}$$

Donc $|||T||| \leq 1$. Si on prend $f(x) = 1$ alors $||T(f)||_\infty = ||f||_\infty = 1$. Le spectre $\sigma(T)$ est donc contenu dans le disque $D(0,1)$. Nous allons montrer qu'il se confond avec l'intervalle $[0,1]$ et qu'il ne contient aucune valeur propre. Soit λ un élément de $D(0,1)$; alors $T - \lambda I$ est toujours injectif. En effet, soit $f \in E$ telle que $T(f) - \lambda f = 0$; ceci signifie que pour tout $x \in [0,1]$, $(x - \lambda)f(x) = 0$. Donc f est nulle sur l'ouvert $[0,1] - \{\lambda\}$ qui est dense dans $[0,1]$. Comme elle est continue, elle est identiquement nulle ; ce qui établit l'injectivité de $T - \lambda I$. Le spectre ne contient donc aucune valeur propre.

- Supposons $\lambda \in D(0,1) - [0,1]$. Alors, pour toute $g \in E$, l'équation $T(f) - \lambda f = g$ a une solution dans E qui est la fonction $f(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda}$. Donc $T - \lambda I$ est inversible pour ces valeurs de λ.

- Si $\lambda \in [0,+1]$, alors l'image de l'opérateur $T - \lambda I$ est l'ensemble des fonctions $g \in E$ telles que $g(\lambda) = 0$. L'opérateur $T - \lambda I$ n'est donc pas surjectif. D'où $\sigma(T) = [0,1]$.

ii) Pour toute fonction $f \in E$ on a $S(f)(x) = (x^2 + x) \int_0^1 f(y)dy$. L'image de T est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 engendré par la fonction $f_0(x) = x^2 + x$, il est donc de rang fini et n'est pas injectif ; par suite 0 en est une valeur propre, le sous-espace propre associé étant confondu avec le noyau de la forme linéaire continue $f \in E \longmapsto \int_0^1 f(y)dy \in \mathbb{C}$. Il est facile de voir que l'autre partie du spectre est constituée de la valeur propre $\frac{5}{6}$ ayant pour sous-espace propre le sous-espace de dimension 1 engendré par f_0. □

Exercice IX. 5.6

i) L'expression analytique de R_α est évidente. Pour $z \in \mathbb{S}^1$ on a $R_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha}z$ ou encore, si on écrit $z = e^{2i\pi x}$ avec $x \in \mathbb{R}$, $R_\alpha(z) = e^{2i\pi(x+\alpha)}$.

ii) On développe f et g en séries de Fourier

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{2i\pi nx}, \qquad g(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_n e^{2i\pi nx}.$$

L'équation devient alors

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (e^{2i\pi n\alpha} - \lambda) f_n e^{2i\pi nx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_n e^{2i\pi nx}.$$

Comme le développement en série de Fourier d'une fonction est unique, cette égalité nous donne le système

$$\text{(S)} \qquad (e^{2i\pi n\alpha} - \lambda) f_n = g_n \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

a) Supposons $\rho \neq 1$.
Dans ce cas la quantité $e^{2i\pi n\alpha} - \lambda$ est non nulle pour tout $n \in \mathbb{Z}$. D'où

$$f_n = \frac{g_n}{e^{2i\pi n\alpha} - \lambda}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Reste à montrer que la fonction f ainsi définie par ses coefficients de Fourier est dans $L^2(\mathbb{S}^1)$. On a $|e^{2i\pi n\alpha} - \lambda| \geq |1 - \rho|$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ce qui donne l'inégalité

$$(\mathrm{I}_1) \qquad |f_n| \leq \frac{|g_n|}{|1-\rho|} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Comme $g \in L^2(\mathbb{S}^1)$, f sera aussi dans $L^2(\mathbb{S}^1)$.

b) Supposons $\rho = 1$ et α rationnel.
On peut écrire $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre-eux et $0 \leq p < q$. Dans ce cas $\{e^{2i\pi n\frac{p}{q}} : n \in \mathbb{Z}\}$ est égal à $\{e^{2i\pi\frac{k}{q}} : k = 0, 1, \ldots, q-1\}$, ensemble des racines $q^{\text{èmes}}$ de l'unité.

- Si $\lambda = e^{\frac{2ik\pi}{q}}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ alors le système (S) n'a de solution que si $g_n = 0$ pour n congru à k modulo q.
- Supposons que λ n'est pas racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité ; alors le système (S) admet pour solution

$$f_n = \frac{g_n}{e^{2i\pi n\alpha} - \lambda}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Soit $\delta = \inf_{n\in\{0,1,\ldots,q-1\}} |e^{2i\pi n\alpha} - \lambda| > 0$. Alors

$$(\mathrm{I}_2) \qquad |f_n| \leq \frac{|g_n|}{\delta}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Comme $g \in L^2(\mathbb{S}^1)$, f sera aussi dans $L^2(\mathbb{S}^1)$.

Les inégalités (I_1) et (I_2) montrent que quel que soit le cas a) ou b) lorsque l'équation $f \circ R_\alpha - \lambda f = g$ a une solution (qui est unique), l'application qui à g associe f est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{S}^1)$.

iii) L'application $T_\alpha : L^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels d'inverse $T_{-\alpha}$ (facile à voir). D'autre part si $f, g \in L^2(\mathbb{S}^1)$ on a

$$\begin{aligned}\langle T_\alpha(f), T_\alpha(g)\rangle &= \int_0^1 f(x+\alpha)\overline{g(x+\alpha)}dx \\ &= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \langle f, g\rangle\end{aligned}$$

qui montre bien que T_α est un autorphisme unitaire de $L^2(\mathbb{S}^1)$.

iv) Supposons $\alpha \in [0,1[\cap\mathbb{Q}$. Alors $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et on a

$$R_\alpha^q = \underbrace{R_\alpha \circ \ldots \circ R_\alpha}_{q \text{ fois}} = id_{\mathbb{S}^1}.$$

Par suite $T_\alpha^q = id_{L^2(\mathbb{S}^1)}$; donc les valeurs propres $\lambda \in \mathbb{C}$ de T_α vérifient $\lambda^q = 1$. Elles sont données par

$$\lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{q}} \qquad k = 0, 1, \ldots, q-1.$$

Si $\alpha = 0$, $T_\alpha = id$ et il n'y a qu'une seule valeur propre $\lambda_0 = 1$ de sous-espace propre $L^2(\mathbb{S}^1)$ tout entier. Supposons $\alpha \neq 0$. Il est facile de voir que le sous-espace propre associé à $\lambda_k = e^{\frac{2ik\pi}{q}}$ est le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{S}^1)$ engendré par la famille libre $\left\{e^{2i\pi(k+sq)}\right\}_{s\in\mathbb{Z}}$

Le spectre $\sigma(T_\alpha)$ se réduit aux seules valeurs propres

$$\left\{1, e^{\frac{2i\pi}{q}}, \ldots, e^{\frac{2i\pi(q-1)}{q}}\right\}.$$

En effet on a vu à la question ii) b) que si

$$\lambda \notin \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{q}}, \ldots, e^{\frac{2i\pi(q-1)}{q}}\right\}$$

alors l'opérateur $T_\alpha - \lambda I$ est inversible. Ce qui répond à la question.

v) Supposons $\alpha \in [0,1[\cap\mathbb{Q}^c$ et cherchons d'abord les valeurs propres de T_α. Cela revient à déterminer les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels il existe $f \in L^2(\mathbb{S}^1)$ non nulle telle que

$$(e^{2i\pi n\alpha} - \lambda)f_n = 0 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

On voit alors que tout nombre $\lambda_n = e^{2i\pi n\alpha}$ est valeur propre de T_α de sous-espace propre $E_n = \mathbb{C}e^{2i\pi nx}$. Comme l'ensemble $\{e^{2i\pi n\alpha}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{S}^1$ (on l'a admis) et que le spectre $\sigma(T_\alpha)$ est fermé, on a forcément $\mathbb{S}^1 = \sigma(T_\alpha)$. Donc pour tout nombre complexe λ tel $|\lambda| \neq 1$, l'opérateur $T_\alpha - \lambda I$ est inversible. Ceci découle immédiatement de la question ii) a). □

Exercice IX. 5.7

i) On résout d'abord l'équation (1) : $\frac{dh}{dx} = g$. Comme $\int_0^{2\pi} \frac{dh}{dx} dx = 0$ (h est périodique de période 2π), g doit satisfaire

$$\text{(C)} \qquad \int_0^{2\pi} g(x)dx = 0.$$

Supposons (C) vérifiée. Alors $h(x) = \int_0^x g(t)dt + K$, où K est une constante complexe, est dans V_1 et résout l'équation (1). Pour trouver $f \in V_2$, solution de l'équation $\frac{d^2f}{dx^2} = g$, on résout l'équation (2) : $\frac{df}{dx} = h(x)$. Une condtion nécessaire et suffisante pour qu'il y ait solution est que h vérifie la condition (C), ce qui est possible si on choisit $K = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^x g(t)dt\right) dx$. Donc une condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{d^2f}{dx^2} = g$ admette une solution est que g vérifie (C) et dans ce cas

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_0^s g(t)dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\theta g(u)du \right) d\theta \right) ds$$

est la solution de l'équation en question.

ii) Les sous-espaces $V_0^0 = \{g \in V_0 : \langle g, \mathbf{1} \rangle = 0\}$ et $V_2^0 = \{g \in V_2 : \langle g, \mathbf{1} \rangle = 0\}$ sont des hyperplans fermés respectivement de V_0 et V_2 ayant chacun ξ comme orthogonal dans son espace. En plus $\Delta : V_2^0 \longrightarrow V_0^0$ est un isomorphisme.

iii) Soit $Q = I - P$. Comme $\Delta : V_2^0 \longrightarrow V_0^0$ est un isomorphisme, il admet un inverse T_0. On pose $T = T_0 Q$; on obtient ainsi un opérateur $T : V_0 \longrightarrow V_2$. Il est facile de voir que T vérifie $T\Delta = I - P$.

iv) Pour $g \in V_0^0$, la fonction $A(g) = \int_0^\theta g(u)du$ est un élément de V_1 et l'application $A : V_0^0 \longrightarrow V_1 \subset V_0$ ainsi définie est un opérateur compact (en tant qu'opérateur à valeurs dans V_0). En effet si $x, x' \in [0, 2\pi]$ (avec $x \leq x'$) on a

$$\begin{aligned} |A(g)(x') - A(g)(x)| &= \left| \int_x^{x'} g(u)du \right| \\ &\leq \left(\int_x^{x'} du \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{x'} |g(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}. \\ &\leq ||g|| \sqrt{|x' - x|}. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'image par A de la boule unité de V_0^0 est équicontinue et est bornée pour la norme $|| \ ||_\infty$; elle est donc relativement compacte d'après le théorème d'Ascoli, donc relativement compacte pour la topologie de la norme $|| \ ||$ puisque moins fine que celle associée à $|| \ ||_\infty$. Comme $L : g \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta$ est de rang 1, il est compact. D'autre part, il est facile de voir que pour tout $g \in V_0$ on a

$$Tg = A\{A(Qg) - L(Qg)\}.$$

Ainsi T est compact car A et L sont compacts et Q borné.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons e_n la fonction e^{inx}. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e_n \in V_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et la famille $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de E. Comme

$$T(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 0 \\ -\frac{1}{n^2} e_n & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}$$

le spectre $\sigma(T)$ est l'ensemble $\{0\} \cup \{-\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}^*\}$ et est constitué seulement de valeurs propres. $\square$

Exercice IX. 5.8

i) On a

$$\left| \int_a^b K(x,y)h(y)d\lambda(y) \right| \leq \int_a^b |K(x,y)h(y)|d\lambda(y) \leq M \int_a^b |h(y)|d\lambda(y).$$

Comme h est intégrable la quantité $Th(x)$ existe bien. Montrons que la fonction ainsi obtenue $x \in [a,b] \longmapsto Th(x) \in \mathbb{C}$ est continue. Soit (x_n) une suite tendant vers x et posons $\varphi_n(y) = K(x_n, y)h(y)$. Alors pour tout n, la fonction $y \in [a,b] \longmapsto \varphi_n(y)$ est intégrable et converge simplement vers la fonction $y \in [a,b] \longmapsto K(x,y)h(y)$ (découle de la continuité de K). En plus, pour tout n, $|\varphi_n|$ est dominée par la fonction intégrable $M|h|$. D'après le théorème de Lebesgue, la suite $\left(\int_a^b \varphi_n(y)d\lambda(y)\right) = (Th(x_n))$ converge vers $\int_a^b K(x,y)h(y)d\lambda(y) = Th(x)$, ce qui établit la continuité de Th.

ii) Il est clair que $T : E \longrightarrow E$ est linéaire et qu'on a $||Th||_\infty \leq (b-a)M||h||_\infty$ *i.e.* T est un opérateur borné sur $(E, ||\ \ ||_\infty)$.

iii) On a $|(Tg)(x)| = \left|\int_a^b K(x,y)g(y)d\lambda(y)\right| \leq \int_a^b |K(x,y)g(y)|d\lambda(y) \leq M||g||_1$. En prenant le sup pour $x \in [a,b]$ on obtient $||Tg||_\infty \leq M||g||_1$. L'inégalité est donc vérifiée. De même

$$\begin{aligned} |(T^2g)(x)| &= \left| \int_a^b K(x,y)(Tg)(y)d\lambda(y) \right| \\ &\leq M \int_a^b ||Tg||_\infty d\lambda(y) \\ &\leq M(b-a)||Tg||_\infty \\ &\leq M^2(b-a)||g||_1. \end{aligned}$$

Pour n quelconque, l'inégalité $||T^n g||_\infty \leq ||g||_1 \left(M^n(b-a)^{n-1}\right)$ s'obtient par le même raisonnement.

iv) Posons $\rho = M(b-a)$; alors $\rho < 1$ et la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||g||_1 M^n (b-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} ||g||_1 M \rho^{n-1}$$

converge. Donc la suite (f_n), avec $f_n = g + Tg + \ldots + T^{n-1}g$, converge uniformément vers une fonction f somme de g et d'une fonction continue bornée par $\frac{M||g||_1}{1-\rho}$; f est donc intégrable.

v) On a $Tf = T(g+Tg+\ldots+T^ng+\ldots) = Tg+T^2g+\ldots+T^{n+1}g+\ldots$. D'où $f - Tf = g$ *i.e.* f est solution de (E).

vi) On peut établir l'inégalité $|T^ng(x)| \leq ||g||_1 M^n \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ exactement de la même manière que dans l'exemple IX. 2.5. Nous ne referons pas ces calculs. Comme la série de terme général $M^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ converge ver $Me^{M(x-a)}$, la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction, somme de g et d'une fonction continue bornée, donc f est intégrable. Comme dans v), f vérifie clairement l'équation (E).

vii) Cette fois-ci $K(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$ avec α et β continues et vérifiant la relation $\int_a^b \alpha(x)\beta(y)dy = 0$. On a $Tg(x) = \int_a^b \alpha(x)\beta(y)g(y)dy = \alpha(x)\int_a^b \beta(y)g(y)dy$. En posant $C = \int_a^b \beta(y)g(y)dy$ on obtient $Tg(x) = C\alpha(x)$; calculons

$$T^2g(x) = \int_a^b \alpha(x)\beta(y)(Tg)(y)dy = \alpha(x)\int_a^b \beta(y)C\alpha(y)dy = 0.$$

Par suite pour $n \geq 2$, $T^ng = 0$. La solution f de l'équation intégrale (1) est donc égale à $g + \alpha\int_a^b \beta(y)g(y)dy$. □

Chapitre X

Exercice X. 5.1

Soit $y \in E$ et notons $T_y : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire continue qui à x associe $T_y(x) = \langle Tx, y\rangle$. Alors T_y est continue ; en effet

$$||T_y(x)|| = |\langle Tx, y\rangle| = |\langle x, Sy\rangle| \leq ||Sy|| \cdot ||x||.$$

De même, pour tous $x, y \in E$, on a $|\langle Tx, y\rangle| \leq ||Tx|| \cdot ||y||$. Les deux inégalités qu'on vient d'établir montrent que l'application bilinéaire $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, qui à (x,y) associe $\langle Tx, y\rangle$, est séparément continue, donc continue (d'après l'exercice VI. 5.3). D'où

$$\begin{aligned} |||T||| &= \sup_{||x||\leq 1} ||Tx|| \\ &\leq \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |\langle Tx, y\rangle| \\ &= \sup_{||x||\leq 1, ||y||\leq 1} |f(x,y)| \\ &= |||f||| \end{aligned}$$

qui montre bien que T est borné. □

Exercice X. 5.2

La suite (λ_k) tend vers 0 ; elle est donc bornée ; soit $\alpha = \sup|\lambda_k|$. On a clairement $||Tx|| \leq \alpha||x||$ qui montre que T est bien défini et est borné. Le fait qu'il soit auto-adjoint est immédiat. Pour montrer que T est compact, il suffit de montrer que pour toute suite (x_n) telle que, pour tout n, $||x_n|| \leq 1$, la suite $T(x_n)$ admet une sous-suite convergente.

Comme T est borné, la suite $(T(x_n))$ est bornée, donc faiblement bornée et par suite elle admet une sous-suite $(T(x'_n))$ faiblement convergente *i.e.* il existe $y \in E$ tel que pour tout $u \in E$ on ait $\lim_{n\to+\infty}\langle T(x'_n), u\rangle = \langle y, u\rangle$.

Nous allons montrer que la suite $(T(x'_n))$ converge fortement dans E ; pour cela il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy.

Soient $\varepsilon > 0$ et k et ℓ des entiers naturels. On a

$$||T(x'_k - x'_\ell)||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |\langle x'_k - x'_\ell, e_n\rangle|^2.$$

Comme la suite (λ_n) tend vers 0, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_0 \Longrightarrow |\lambda_n| < \varepsilon$. D'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=N_0}^{\infty} |\langle T(x'_k - x'_\ell), e_n\rangle|^2 &= \sum_{n=N_0}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x'_k - x'_\ell, e_n\rangle|^2 \\ &\leq \varepsilon^2 \sum_{n=N_0}^{\infty} |\langle x'_k - x'_\ell, e_n\rangle|^2 \\ &\leq \varepsilon^2 ||x'_k - x'_\ell||^2.\end{aligned}$$

D'autre part comme $(T(x'_n))$ est faiblement convergente, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$k, \ell \geq N_1 \Longrightarrow |\langle T(x'_k - x'_\ell), e_n\rangle|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{N_0} \quad \text{pour tout } n \in \{1, \dots, N_0 - 1\}.$$

On a donc pour $k, \ell \geq N_1$

$$\begin{aligned}||T(x'_k) - T(x'_\ell)||^2 &= \sum_{n=1}^{N_0} |\langle T(x'_k) - T(x'_\ell), e_n\rangle|^2 + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x'_k - x'_\ell, e_n\rangle|^2 \\ &\leq N_0 \frac{\varepsilon^2}{N_0} + \varepsilon^2 ||x'_k - x'_\ell||^2 \\ &\leq C^2 \varepsilon^2\end{aligned}$$

où C est une constante positive. On a donc $||T(x'_k) - T(x'_\ell)|| \leq C\varepsilon$ qui montre bien que $(T(x'_n))$ est une suite de Cauchy. Donc T est compact. □

Exercice X. 5.3

i) Soient $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(f_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ deux bases hilbertiennes de E. On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} ||Te_i||^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\langle Te_i, f_j\rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i, T^* f_j\rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} ||T^* f_j||^2.\end{aligned}$$

En particulier si les bases (e_i) et (f_j) sont les mêmes on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||Te_i||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} ||T^* e_i||^2.$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} ||Te_i||^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} ||T^* e_i||^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} ||T^{**} f_j||^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} ||Tf_j||^2.\end{aligned}$$

ii) De ce qui précède on voit que T est de Hilbert-Schmidt si, et seulement si, T^* l'est.

iii) Soient T et S deux opérateurs de Hilbert-Schmidt et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de E. On a

$$\begin{aligned}||(T+S)e_i||^2 &= \langle Te_i + Se_i, Te_i + Se_i\rangle \\ &= ||Te_i||^2 + ||Se_i||^2 + \langle Te_i, Se_i\rangle + \langle Se_i, Te_i\rangle \\ &\leq ||Te_i||^2 + ||Se_i||^2 + 2||Te_i|| \cdot ||Se_i|| \\ &\leq (||Te_i|| + ||Se_i||)^2 \\ &\leq 2\left(||Te_i||^2 + ||Se_i||^2\right).\end{aligned}$$

En sommant à gauche et à droite sur $i \in \mathbb{N}^*$ on obtient

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||(T+S)e_i||^2 \leq 2\sum_{i=1}^{\infty} \left(||Te_i||^2 + ||Se_i||^2\right) < +\infty.$$

Donc $T + S \in \mathcal{HS}(E)$. On a clairement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $T \in \mathcal{HS}(E)$, $\lambda T \in \mathcal{HS}(E)$. Par suite $\mathcal{HS}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

iv) Le nombre $|||T|||_0$ est l'évaluation en T de la forme quadratique associée à la forme hermitienne définie positive sur $\mathcal{HS}(E)$

$$\langle T, S\rangle_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Te_i, Se_i\rangle.$$

Donc $|||\ \ |||_0$ est une norme préhilbertienne sur $\mathcal{HS}(E)$.

v) Soient $T \in \mathcal{HS}(E)$, $x \in E$ et (e_i) une base hilbertienne de E. Alors

$$\begin{aligned}Tx &= T\left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle Te_i.\end{aligned}$$

D'où

$$||Tx|| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} ||Te_i||^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||x|| \cdot |||T|||_0.$$

Par suite

$$|||T||| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} \leq |||T|||_0.$$

vi) Montrons que l'espace $(\mathcal{HS}(E), |||\ |||_0)$ est complet. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{HS}(E), |||\ |||_0)$. Comme $|||\ ||| \leq |||\ |||_0$, (T_n) est une suite de Cauchy dans $(E, |||\ |||)$; elle converge donc vers un élément $T \in L(E)$.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > m \geq N \Longrightarrow |||T_n - T_m|||_0 < \varepsilon$ *i.e.*

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||(T_n - T_m)(e_i)||^2 < \varepsilon^2.$$

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ on a $\sum_{i=1}^{r} ||(T_n - T_m)(e_i)||^2 < \varepsilon^2$. On fixe n et on prend la limite sur m ; on obtient

$$\sum_{i=1}^{r} ||(T_n - T)(e_i)||^2 \leq \varepsilon^2.$$

On prend ensuite la limite sur r et cela donne $\sum_{i=1}^{\infty} ||(T_n - T)(e_i)||^2 \leq \varepsilon^2$. Cette inégalité montre que

(*) $T_n - T \in \mathcal{HS}(E)$, donc T est de Hilbert-Schmidt ;

(**) $|||T_n - T|||_0 \leq \varepsilon$ *i.e.* la suite (T_n) converge vers T pour la norme $|||\ |||_0$. L'espace normé $(\mathcal{HS}(E), |||\ |||_0)$ est donc de Hilbert.

vii) Soient $A \in L(E)$, T un opérateur de Hilbert-Schmidt et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de E. On a pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $||AT(e_i)|| \leq |||A||| \cdot ||T(e_i)||$. Ce qui donne $\sum_{i=1}^{\infty} ||AT(e_i)||^2 \leq |||A|||^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} ||T(e_i)||^2 < +\infty$. Donc $AT \in \mathcal{HS}(E)$.

Comme $T \in \mathcal{HS}(E)$, $T^* \in \mathcal{HS}(E)$ d'après la question i). Donc $(TA)^* = A^*T^* \in \mathcal{HS}(E)$ d'après ce qui précède et par suite $TA \in \mathcal{HS}(E)$; $\mathcal{HS}(E)$ est donc un idéal bilatère de $L(E)$.

viii) Soit K un opérateur de rang fini et notons F son image qui est un sous-espace de dimension finie (disons n) de E. On a clairement $K = PK$ où P est la projection orthogonale sur F. Pour montrer que K est de Hilbert-Schmidt, il suffit de montrer, en vertu de ce qui précède (puisque K est borné), que P est de Hilbert-Schmidt. Choisissons une base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de E telle que les n premiers vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ forment une base orthonormale de F. Alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||P(e_i)||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2 = n$$

i.e. $P \in \mathcal{HS}(E)$.

Soient $T \in \mathcal{HS}(E)$, $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de E et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{N+1}^{\infty} ||T(e_i)||^2 < \varepsilon^2$. Soit $K_\varepsilon \in L(E)$ défini par

$$K_\varepsilon(e_i) = \begin{cases} T(e_i) & \text{si } i \in \{1, \dots, N\} \\ 0 & \text{si } i \geq N+1 \end{cases}$$

Il est clair que K_ε est de rang fini et que $|||T - K_\varepsilon|||_0^2 = \sum_{N+1}^{\infty} ||T(e_i)||^2 < \varepsilon^2$. Ce qui montre que l'espace $\mathcal{RF}(E)$ des opérateurs de rang fini sur E est dense dans $(\mathcal{HS}(E), |||\ |||_0)$.

ix) D'après ce qui précède et le fait que $|||\ ||| \leq |||\ |||_0$ tout opérateur T de Hilbert-Schmidt est limite en norme $|||\ |||$ d'une suite d'opérateurs de rang fini. Donc $T \in \overline{\mathcal{RF}(E)} = \mathcal{K}(E)$ d'après la proposition X. 1.7 ; $\mathcal{K}(E)$ étant l'espace des opérateurs compacts sur E. □

Exercice X. 5.4

i) Soient $f, g \in E$. on a

$$\begin{aligned} \langle Tf, g\rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,y) f(y) dy \right) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 K(x,y) f(y) \overline{g(x)} dy dx \\ &= \int_0^1 f(y) \overline{\left(\int_0^1 K(y,x) g(x) dx \right)} dy \\ &= \langle f, Tg\rangle \end{aligned}$$

qui montre bien que T est hermitien.

ii) Soit $\widehat{E}$ le complété de E qui n'est rien d'autre que $L^2([0,1], \mathbb{C})$. L'opérateur T se prolonge de manière canonique à $\widehat{E}$ en un opérateur compact $\widehat{T}$ sur $\widehat{E}$. D'après la remarque qui suit la démonstration du théorème IX. 4.5., $\widehat{T}$ a les mêmes valeurs propres non nulles que T. Soit $(e_i)_{i \geq 1}$ une base hilbertienne propre de $(\mathrm{Ker}\widehat{T})^\perp$ associée à $\widehat{T}$. Pour toute fonction $f \in E$ on a l'inégalité $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i\rangle|^2 \leq ||f||^2$. Cette inégalité appliquée à la fonction continue $\overline{K(x, \cdot)} : y \longmapsto \overline{K(x,y)}$ (qui est dans E) donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \left| \int_0^1 K(x,y) e_i(y) dy \right|^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} |\langle e_i, \overline{K(x,\cdot)}\rangle|^2 \\ &\leq \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \\ &= ||K(x,\cdot)||^2. \end{aligned}$$

Or $\int_0^1 K(x,y) e_i(y) dy = (Te_i)(x) = \lambda_i e_i(x)$. Ce qui donne

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i e_i(x)|^2 \leq \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \leq ||K||_\infty < +\infty.$$

Ceci montre que le premier membre est une série qui converge uniformément par rapport à x. Après intégration de ce premier membre et du deuxième membre on obtient

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2 \left(\int_0^1 |e_i(x)|^2 dx \right) \leq \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dx dy$$

et en tenant compte de $||e_i|| = 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2 \leq \int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dx dy.$$

iii) Complétons $(e_i)_{i \geq 1}$ en une base hilbertienne $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$ de $E = \mathrm{Ker}\widehat{T} \oplus (\mathrm{Ker}\widehat{T})^{\perp}$. Alors on a

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||\widehat{T}\varepsilon_j||^2 = \sum_{i=0}^{\infty} ||\widehat{T}e_i||^2 = \sum_{i=0}^{\infty} ||Te_i||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < +\infty.$$

L'opérateur $\widehat{T}$ est donc de Hilbert-Schmidt sur $\widehat{E}$. □

Exercice X. 5.5

i) Cette question est triviale ; elle se réduit à une simple vérification des égalités

$$\begin{aligned} (P+Q)(T) &= P(T) + Q(T) \\ (\lambda P)(T) &= \lambda P(T) \\ (P.Q)(T) &= P(T)Q(T) \end{aligned}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

ii) Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On a

$$P(T) = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_n T^n$$

Comme $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ et $(T^n)^* = (T^*)^n$ on a

$$(P(T))^* = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 T^* + \ldots + \overline{a}_n (T^*)^n = \overline{P}(T^*).$$

iii) Si $T = T^*$ une condition suffisante pour que $P(T)$ soit hermitien est $a_k = \overline{a}_k$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$ *i.e.* $P \in \mathbb{R}[X]$.

iv) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après la question iii), $P(T)$ est hermitien. Supposons P positif sur $[\alpha, \beta]$ et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \beta_1, \ldots, \beta_s$ les racines réelles de P telles que

- pour tout $i = 1, \ldots, r$, $\alpha_i \leq \alpha$,
- pour tout $j = 1, \ldots, s$, $\beta_j \geq \beta$,
- les λ_k sont distinctes et vérifient $\lambda_k \in]\alpha, \beta[$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.

Soient $u_1 + \sqrt{-1}v_1, u_1 - \sqrt{-1}v_1, \ldots, u_q + \sqrt{-1}v_q, u_q - \sqrt{-1}v_q$ les racines complexes de P. Comme P est positif sur $[\alpha, \beta]$, la multiplicité de chaque λ_k est forcément paire ; notons-la $2m_k$.

Remarquons d'abord que

- tous les opérateurs $T - \alpha_i I$, $\beta_j I - T$ sont positifs, commutent entre-eux et commutent avec les opérateurs $T - \lambda_k I$ et $\left((T - u_\ell I)^2 + v_\ell^2 I\right)$;

- pour tout $k = 1, \dots, n$, l'opérateur $(T - \lambda_k I)^{2m_k}$ est positif car pour tout $x \in E$ on a $\langle (T - \lambda_k I)^{2m_k} x, x\rangle = \langle (T - \lambda_k I)^{m_k} x, (T - \lambda_k I)^{m_k} x\rangle \geq 0$.
- pour tout $\ell = 1, \dots, q$, l'opérateur $\big((T - u_\ell I)^2 + v_\ell^2 I\big)$ est positif car somme de deux opérateurs positifs.

Le polynôme P s'écrit

$$P(X) = c\prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)\prod_{j=1}^{s}(\beta_j - X)\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)^{2m_k}\prod_{\ell=1}^{q}\left((X - u_\ell)^2 + v_\ell^2\right)$$

avec c un réel positif. D'où

$$P(T) = c\prod_{i=1}^{r}(T - \alpha_i I)\prod_{j=1}^{s}(\beta_j I - T)\prod_{k=1}^{n}(T - \lambda_k I)^{2m_k}\prod_{\ell=1}^{q}\left((T - u_\ell I)^2 + v_\ell^2 I\right)\cdot$$

Comme chacun des facteurs suivants

$$(T - \alpha_i I),\ \ (\beta_j I - T),\ \ (T - \lambda_k I)^{2m_k},\ \ \left((T - u_\ell I)^2 + v_\ell^2 I\right)$$

est un opérateur positif et que tous ces facteurs commutent entre eux, l'opérateur $P(T)$ est positif (*cf.* exercice X. 5.6).

On a $Q - P \geq 0$ sur $[\alpha, \beta]$; donc $Q(T) - P(T)$ est un opérateur positif *i.e.* $P(T) \leq Q(T)$.

Soit $P \in [X]$ et posons $\sigma = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |P(x)|$. On a bien sûr $-\sigma \leq P(x) \leq +\sigma$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$. Donc $-\sigma I \leq P(T) \leq +\sigma I$ et par suite $|||P(T)||| \leq \sigma$.

v) Soit B l'algèbre des fonctions continues sur $[\alpha, \beta]$ munie de la norme de la convergence uniforme $||\ \ ||_\infty$. Elle contient l'algèbre $\mathcal{P}$ des fonctions polynômes qui y est dense d'après le théorème de Stone-Weirstrass. D'après la question iv) le morphisme d'algèbres $\Phi_T : \mathcal{P} \longrightarrow L(E)$ vérifie $|||\Phi_T(P)||| \leq ||P||_\infty$. Il est donc continu ; par suite il se prolonge en un morphisme $\Phi_T : B \longrightarrow L(E)$ d'algèbres, continu.

vi) Si T est positif, sa borne inférieure α est positive. Dans ce cas l'image par Φ_T de la fonction continue $p : x \in [\alpha, \beta] \longmapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ est un opérateur positif D qui vérifie $D^2 = \Phi_T(p)\Phi_T(p) = \Phi_T(p^2) = \Phi_T(x) = T$.

vii) Si $\alpha > 0$, la fonction $q : x \in [\alpha, \beta] \longmapsto x \in \mathbb{R}$ est inversible dans l'algèbre B et son inverse $\psi(x) = \frac{1}{x}$ vérifie

$$\Phi_T(1) = \Phi_T(q.\psi) = \Phi_T(q)\Phi_T(\psi) = TT' = T'T = I$$

i.e. T est inversible et a pour inverse l'image par Φ_T de la fonction ψ. □

Exercice X. 5.6

i) Soit $x \in E$. On a $\langle TSx, x\rangle = \langle TU^2x, x\rangle = \langle UTUx, x\rangle = \langle T(Ux), (Ux)\rangle \geq 0$ car T est positif. Donc TS est positif.

ii) Supposons $0 \leq S_n \leq 1$. Soit $x \in E$; on a

$$\begin{aligned}\langle S_{n+1}x, x\rangle &= \langle S_n x, x\rangle - \langle S_n^2 x, x\rangle \\ &= \langle S_n x, x\rangle - ||S_n x||^2\end{aligned}$$

Comme S_n est positif et de norme ≤ 1, on a $||S_n x||^2 \leq |||S_n|||\langle S_n x, x\rangle \leq \langle S_n x, x\rangle$. Donc S_{n+1} est positif. D'autre part

$$\begin{aligned}|||S_{n+1}||| &= |||S_n(I - S_n)||| \\ &\leq |||S_n||| \cdot |||I - S_n||| \\ &\leq |||S_n||| \text{ car } S_n \leq I \\ &\leq 1\cdot\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

iii) On remarque que $\sum_{k=0}^{n} S_k^2 = S - S_{n+1}$. Pour $x \in E$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} ||S_k(x)||^2 &= \langle (S - S_{n+1})(x), x\rangle \\ &\leq ||(S - S_{n+1})(x)|| \cdot ||x|| \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz).} \\ &\leq |||S - S_{n+1}||| \cdot ||x||^2 \text{ (car } S - S_{n+1} \text{ est borné)} \\ &\leq 2||x||^2\cdot\end{aligned}$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} ||S_n(x)||^2$ converge donc ; par suite, son terme général tend vers 0 *i.e.* $S_n(x)$ tend vers 0 pour la norme de E. Ce qui établit la convergence intermédiaire de la suite (S_n) vers 0.

iv) On a $|| \sum_{k=0}^{n} S_k^2(x) - S(x)|| = ||S_{n+1}(x)||$; d'après ce qui précède, $||S_{n+1}(x)||$ tend vers 0. Donc la suite (Θ_n), avec $\Theta_n = \sum_{k=0}^{n} S_k^2$, tend vers S au sens de la convergence intermédiaire. Comme la multiplication $(T, S) \in L(E) \times L(E) \longmapsto TS \in L(E)$ est séparément continue pour la topologie de la covergence intermédiaire, $(T\Theta_n)$ tend vers TS.

v) On a

$$\begin{aligned}\langle TS(x), x\rangle &= \left\langle T\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} S_k^2(x)\right), x\right\rangle \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left\langle \sum_{k=0}^{n} TS_k^2(x), x\right\rangle \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\langle TS_k^2(x), x\rangle \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\langle TS_k(x), S_k(x)\rangle \\ &\geq 0\cdot\end{aligned}$$

Ce qui montre que TS est positif. □

Chapitre XI

Exercice XI. 4.1

Soient $A \in L(E)$ et $p \in \mathbb{N}$; on pose $S_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{A^n}{n!}$. On a

$$|||S_p||| = \left|\left|\left|\sum_{n=0}^{p} \frac{A^n}{n!}\right|\right|\right| \leq \sum_{n=0}^{p} \frac{|||A^n|||}{n!} \leq \sum_{n=0}^{p} \frac{|||A|||^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|||A|||^n}{n!} = e^{|||A|||}.$$

Comme $L(E)$ est complet (car E l'est) la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge vers un élément e^A de $L(E)$.

ii) Soient $A, B \in L(E)$. Alors les trois séries suivantes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!}$$

convergent respectivement vers e^A, e^B et e^{A+B}. Soit $p \in \mathbb{N}$; on a

$$\left(\sum_{n=0}^{p} \frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{p} \frac{B^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{p}\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}\right).$$

Si A et B commutent on a $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} = (A+B)^n$ (formule du binôme de Newton). On a donc

$$\left(\sum_{n=0}^{p} \frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{p} \frac{B^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{p} \frac{(A+B)^n}{n!}.$$

En faisant tendre p vers l'infini on obtient $e^A e^B = e^{A+B}$. Ce qui est la relation cherchée. Comme A commute à $-A$, on a $I = e^0 = e^{A+(-A)} = e^A e^{-A}$; donc e^A est inversible d'inverse e^{-A}. □

Exercice XI. 4.2

i) On construit la suite de fonctions φ_n de la façon suivante : $\varphi_0(t) = X_0$ et pour $n \geq 1$, $\varphi_n(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} A(\varphi_{n-1}(s))ds$. Comme A est à coefficients constants on a en fait $\varphi_n(t) = X_0 + A\left(\int_{t_0}^{t} \varphi_{n-1}(s)ds\right)$. Pour $n = 1$, $\varphi_1(t) = X_0 + A\left(\int_{t_0}^{t} X_0 ds\right) = X_0 + (t - t_0)A(X_0)$. De façon générale le calcul montre que

$$\varphi_n(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} (t-t_0)^k \frac{A^k}{k!}\right)(X_0).$$

Faisant tendre n vers l'infini, on obtient à la limite $\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}(X_0)$.

ii) La solution qu'on vient de construire s'écrit $\varphi(t) = e^{tA}(C)$ où C est le vecteur $e^{-t_0 A}(X_0)$. Supposons que C est une fonction de $t \in J$. Alors

$$\varphi'(t) = e^{tA}(C'(t)) + A\left(e^{tA}(C(t)\right).$$

Comme $A\left(e^{tA}(C(t)\right) = A\varphi(t)$, en reportant dans $X'(t) = AX(t)+B(t)$, on obtient $A\varphi(t) + e^{tA}(C'(t)) = A\varphi(t) + B(t)$ qui donne finalement $C'(t) = e^{-tA}(B(t))$ et par suite $C(t) = \int e^{-tA}(B(t))$ où $\int e^{-tA}(B(t))$ est le vecteur dont les coordonnées sont des primitives des coordonnées du vecteur $e^{-tA}(B(t))$. En définitive la solution du système non homogène est

$$\varphi(t) = e^{tA}\left(\int e^{-tA}(B(t))\right).$$

iii) Une application immédiate de ce qui précède au cas $n = 1$ donne comme solution de l'équation différentielle $x'(t) = ax(t) + b(t)$, la fonction $\varphi(t) = e^{at}\gamma(t)$ où γ est une primitive de la fonction $e^{-at}b(t)$.

Exercice XI. 4.3

Supposons $\lambda < 0$ et posons $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Alors $u(t) = ae^{\omega t} + be^{-\omega t}$ (a et b sont des constantes réelles) est solution de l'équation mais les conditions aux limites imposent à a et b d'être nulles. Donc la seule solution est $u = 0$.

Supposons $\lambda \geq 0$ et posons $\omega = \sqrt{\lambda}$. La résolution habituelle donne les solutions $u(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ de l'équation (avec a et b des constantes réelles). La première condition $u(0) = 0$ impose à a d'être nulle et la seconde $u(\pi) = 0$ impose à ω d'être un entier relatif n. Les valeurs propres sont donc $\lambda_n = n^2$ avec $n \in \mathbb{N}$, chacune associée à la fonction propre $u_n(t) = \sin(nt)$. □

Exercice XI. 4.4

i) En remplaçant $y(x,t)$ par $u(x)v(t)$ dans l'équation (1) on obtient

$$u''(x)v(t) = \frac{\rho(x)}{T}u(x)v''(t)\;;$$

cette égalité donne, en divisant ses deux membres (on suppose bien sûr que cela est possible) par le produit $u(x)v(t)\rho(x)$

$$\frac{u''(x)}{\rho(x)u(x)} = \frac{v''(t)}{Tv(t)}.$$

Ce qui implique que les deux membres sont égaux à une même constante $-\lambda \in \mathbb{R}$. On arrive donc aux deux équations linéaires du second ordre

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda\rho(x)u(x) = 0 \\ v''(t) + \lambda Tv(t) = 0. \end{cases}$$

Les conditions initiales et aux limites auxquelles est soumise $y(x,t) = u(x)v(t)$ imposent à u et v de vérifier les conditions $u(a) = u(b) = 0$ et $v'(0) = 0$. Les fonctions u et v sont donc solutions des deux problèmes de Sturm-Liouville

(2) $$u''(x) + \lambda\rho(x)u(x) = 0 \quad \text{avec} \quad u(a) = u(b) = 0$$

et

(3) $$v''(t) + \lambda T v(t) = 0 \quad \text{avec} \quad v'(0) = 0.$$

ii) Le fait que $y_n(x,t) = u(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n T}t\right)$ vérifie les deux premières conditions du problème (1) est immédiat. D'autre part on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}(x,t) &= u_n''(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n T}t\right)\\ &= -\lambda_n \rho(x) u_n(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n T}t\right)\\ &= \rho(x)u_n(x)\frac{d^2}{dt^2}\left(\cos\left(\sqrt{\lambda_n T}t\right)\right)\\ &= \rho\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2}(x,t)\end{aligned}$$

qui montre bien que y_n est solution de l'équation (1).

iii) Avec les hypothèses sur ρ, a et b le problème (2) devient $u''(x) + \lambda u(x) = 0$ avec $u(0) = u(\pi) = 0$. D'après l'exercice XI. 4.3 les valeurs propres sont $\lambda_n = n^2$, chacune associée à la fonction propre $u_n(x) = \sin(nx)$. Pour continuer, on aura besoin de l'assertion suivante sur les séries de Fourier dont on laissera la démonstration au bon soin du lecteur (mais qui pourrait aussi consulter [Go] p. 274) :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période τ dont la restriction à un intervalle de longueur τ est de carré intégrable. Notons

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{\tau}x\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}x\right)\right)$$

sa série de Fourier. Alors f est de classe C^∞ si, et seulement si, pour tout $r \in \mathbb{N}$, les séries numériques $\sum_{n=0}^{\infty} n^{2r}a_n^2$ et $\sum_{n=0}^{\infty} n^{2r}b_n^2$ convergent.

La fonction f est de classe C^∞ sur $[0,\pi]$ et telle que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, les dérivées $f_d^{(\ell)}(0)$ et $f_g^{(\ell)}(\pi)$ coincident ; elle se prolonge donc en une fonction C^∞ impaire (qu'on continuera à noter f) sur tout $\mathbb{R}$, périodique de période π. Comme $u_n(x) = \sin(nx)$, α_n n'est rien d'autre que le coefficient de Fourier "b_n" ; la fonction f étant C^∞, pour tout $r \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^{2r}\alpha_n^2$ converge. Un calcul simple montre alors que pour tout entier naturel r, la suite (indexée par $p \in \mathbb{N}$) de fonctions $\sum_{n=0}^{p} n^{2r}\alpha_n^{2r}\sin(nx)\cos\left(2n\sqrt{T}t\right)$ converge uniformément sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+$; donc pour tout $r \in \mathbb{N}$, toute dérivée $\frac{\partial^r S_p}{\partial x^k \partial t^\ell}(x,t)$ d'ordre r de la suite de fonctions

$$S_p(x,t) = \sum_{n=0}^{p}\alpha_n\sin(2nx)\cos\left(2n\sqrt{T}t\right)$$

converge uniformément vers $\frac{\partial^r y}{\partial x^k \partial t^\ell}(x,t)$. La fonction $y(x,t)$ est donc C^∞. Elle vérifie en plus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin(2nx)\cos\left(2n\sqrt{T}t\right)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -4n^2\alpha_n \sin(2nx)\cos\left(2n\sqrt{T}t\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin(2nx)\left(\frac{-4n^2T}{T}\cos\left(2n\sqrt{T}t\right)\right) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin(2nx)\left((-4n^2T)\cos\left(2n\sqrt{T}t\right)\right) \\
&= \frac{1}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)
\end{aligned}$$

i.e. $y(x,t)$ est solution de l'équation (1). (Les dérivations sous le signe somme sont légitimes en raison de la convergence uniforme de toutes les dérivées de $S_p(x,t)$ vers celles de $y(x,t)$.) Les conditions initiales et aux limites se vérifient aisément. Les premières $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$ sont immédiates. De même que $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$. La dernière $y(x,0) = f(x)$ n'est rien d'autre que le développement de Fourier de f en tant que fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, C^∞ et périodique de période π. □

BIBLIOGRAPHIE

[Bo] BOURBAKI, N. *Espaces vectoriels topologiques.* Hermann (1967).

[Br] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Collection Mathématiques appliquées pour la Maîtrise, Masson (1987).

[Cs] CARLESON, L. On Convergence and Growth of Partial Sums of Fourier Series. Acta Mathematica 116 (1966) pp. 135 -157.

[Ca] CARTAN, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann (1985).

[Ch] CHOQUET, G. *Cours d'analyse. Topologie.* Masson (1964).

[CCM1] CHRISTOL, G., COT, A. & MARLE, C.-M. *Topologie.* Ellipses (1997).

[CCM2] CHRISTOL, G., COT, A. & MARLE, C.-M. *Calcul différentiel.* Ellipses (1997).

[Fe] FERNANDEZ, P. *Medida e integração.* Projeto Euclides (1976).

[Go] GAPAILLARD, J. *Intégration pour la Licence.* Masson, (1997).

[Ge] GELBAUM, B.R. *Problems in Real and Complex Analysis.* Springer-Verlag (1991).

[Go] GODEMENT, R. *Analyse mathématique,* Tome II. Springer-Verlag, (1998).

[Gb] GOLDBERG, S. *Unbounded Linear Operators. Theory and Applications.* Dover Publications, INC. New York (1985).

[GT] GONNORD, S. & TOSEL, N. *Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses (1996).

[Gr] GRAMAIN, A. *Intégration.* Collection Méthodes, Hermann (1994).

[Ha] HALMOS, P.R. *A Hilbert Spaces Problem Book.* GTM n. 19, Springer-Verlag (1982).

[HL] HIRSCH F. & LACOMBE, G. *Eléments d'analyse fonctionnelle.* Masson (1997). (1982).

[Ho] HOLMES, R. *Geometric Functional Analysis and its Applications.* Springer Verlag (1965).

[In] INCE, E.L. *Ordinary Differential Equations.* Dover Publications, INC. New York.

[Ja] JACOB, P. *Cours de probabilités et intégration.* Cours polycopié Université de Lille I (1984).

[KA] KANTOROVITCH, L. & AKILOV, G. *Analyse fonctionnelle.* Tomes I et II, Editions MIR (1977).

[KG] KIRILOV, A. & GVICHIANI, A. *Théorèmes et problèmes d'analyse fonctionnelle.* Editions MIR (1982).

[KF] KOLMOGOROV, A. & FOMINE, S. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* Editions MIR (1974).

[Kr] KRÉE, P. *Intégration et théorie de la mesure. Une approche géométrique.* Ellipses (1997).

[La] LACROIX-SONRIER, M.-T. *Distributions - Espaces de Sobolev, applications.* Ellipses (1998).

[LS] LUSTERNIK, L. & SOBOLEV, V. *Précis d'analyse fonctionnelle.* Editions MIR (1982).

[Ma] MALLIAVIN, P *Intégration et probabilités. Analyse de Fourier et analyse spectrale.* Masson (1982).

[Go] MARCO, J. P. *Analyse pour la Licence.* Masson, (1998).

[Me] MÉTIVIER, M. *Notions fondamentales de théorie des probabilités.* Dunod Université (1979).

[NS] NUALART, D. & SANZ, M. *Curs de probabilitats.* Collection "Estadística y Análisis Datos" PPU Barcelona (1990).

[Pa] PARREAU, M. *Compléments d'analyse.* Cours polycopié Université de Lille I (1971).

[Po] PONTRIAGUINE, L. *Equations différentielles ordinaires.* Editions Mir (1969).

[Qu] QUEFFÉLEC, H. *Topologie. Cours et exercices corrigés.* Masson (1998).

[QZ] QUEFFÉLEC, H. & ZUILY, C. *Eléments d'analyse pour l'Agŕegation.* Masson (1996).

[RT] RAVIART, P.A. & THOMAS, J.M. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Masson, Paris (1983).

[Re] REVUZ, D. *Mesure et intégration.* Collection Méthodes, Hermann (1997).

[RN] RIESZ, F. & NAGY, B. SZ. *Functional Analysis.* Dover Publications (1990).

[Ru1] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis.* Tata McGraw Hill (1974).

[Ru2] RUDIN, W. *Functional Analysis.* Tata McGraw Hill (1973).

[Sh] SCHAEFER, H. H. *Topological Vector Spaces.* GTM n. 3, Springer-Verlag (1980).

[Sc1] SCHWARTZ, L. *Théorie des distributions.* Hermann (1966).

[Sc2] SCHWARTZ, L. *Topologie générale et analyse fonctionnelle.* Hermann (1970).

[Sc3] SCHWARTZ, L. *Analyse hilbertienne.* Collection Méthodes, Hermann (1979).

[So] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias.* Projeto Euclides (1979).

[Th] THAYER, J. *Operadores auto-adjuntos e equações diferenciais parciais.* Projeto Euclides (1987).

[Ti] TISSERON, C. *Notions de topologie.* Collection Méthodes, Hermann (1996).

[Tr] TRÉNOGUINE, V. *Analyse fonctionnelle.* Editions MIR (1980).

[TPS] TRÉNOGUINE, V., PISSAREVSKI, B. & SOBOLEVA, T. *Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle.* Editions MIR (1987).

[Ve] VENTSEL, H. *Théorie des probabilités.* Editions MIR (1973).

[Wa] WAGSCHAL, C. *Topologie et analyse fonctionnelle.* Collection Méthodes, Hermann (1995).

[WM] WILCOX, H.J. & MYERS, D.L. *An Introduction to the Lebesgue Intergration and Fourier Series.* Dover Publications, INC. New York (1994).

INDEX ALPHABÉTIQUE

Additivité
- d'une mesure, 19
- σ-additivité, 19

Algèbre
- de Boole, 10
- normée, 127
- de Banach, 157

Application
- n-linéaire, 82
- contractante, 6
- mesurable, 13
- continue, 1
- uniformément continue, 4
- linéaire continue, 81

Axiome
- du choix, 172
- (lemme de Zorn), 173

Base
- orthogonale, 118
- orthonormale, 118
- hilbertienne, 118

Borne
- inférieure d'un opérateur, 151
- supérieure d'un opérateur, 151

Borné
- ensemble borné, 100
- faiblement borné, 100

Coefficient de Fourier, 122

Compact
- espace métrique, 4
- espace topologique, 2
- opérateur compact, 133

Complet (espace métrique), 5

Complété d'un espace métrique, 5

Condition de Dini, 122

Convergence
- d'une suite, 4
- faible, 86
- forte, 86
- presque partout, 33
- en norme, 85
- uniforme, 3

Dense (partie), 2

Enveloppe convexe, 87

Equation différentielle,
- ordinaire, 159
- linéaire d'ordre n, 162
- théorème d'existence, 160
- de la corde vibrante, 170

Equicontinuité, 7

Espace
- vectoriel topologique, 67
- localement convexe, 69
- de Fréchet, 77
- normé, 71
- de Banach, 76
- de Hilbert, 112
- topologique, 1
- métrique, 3
- mesurable, 12
- mesuré, 19
- métrique séparable, 3
- réflexif, 101
- séparé, 2

Famille sommable, 74

Fonction
- bornée, 2
- continue, 1
- holomorphe, 78
- intégrable, 40
- p-intégrable, 79
- mesurable, 13
- à variation bornée, 108
- propre, 166

Forme
- linéaire, 86
- bilinéaire, 110
- sesquilinéaire, 111
- hermitienne, 111

– quadratique, 111
– non dégénérée, 111
– positive, 111
– définie positive, 111
Formule du rayon spectral, 131

Homéomorphisme, 1

Idéal
– fermé, 134
– bilatère, 134
Identité
– de Parseval, 118
– du parallélogramme, 113
Inégalité
– de Bessel, 117
– de Cauchy-Schwarz, 112
– de Hölder, 79
– de Minkowski, 79, 112
Intégrale
– d'une fonction mesurable, 40
– de Lebesgue, 40
– de Riemann, 180
– de Stieljes, 108
Isomorphisme
– topologique, 85
– d'espace de Hilbert, 120
– unitaire, 119

Mesure
– complète, 93
– de comptage, 21
– de Dirac, 21
– de Lebesgue, 31
– régulière, 93
– à signe, 57

Norme
– sur un espace vectoriel, 69
– d'une application linéaire, 82
– d'un opérateur, 127

Opérateur
– borné, 127
– compact, 133
– auto-adjoint, 146
– positif, 150
– de Volterra, 145
– hermitien, 166
– intégral, 135
– de rang fini, 135
– de Hilbert-Schmidt, 157
– de projection orthogonale, 150

Problème de Sturm-Liouville, 165
Prolongement
– d'une application, 5, 83
– d'une mesure, 25

Semi-continuité
– supérieure, 107
– inférieure, 107
Système différentiel, 162

Théorème
– d'Ascoli, 7
– de Banach-Schauder, 84
– de Banach-Steinhaus, 86
– de Hahn-Banach (géométrique), 88
– de Hahn-Banach (analytique), 90
– de la convergence dominée, 44
– de Morera, 198
– de Radon-Nikodym, 60
– de Riesz, 68
– de représentation de Riesz, 94
– de Baire, 7
– de Stone-Weirstrass, 121
– de projection orthogonale, 115
– de décomposition de Hahn, 58
– de décomposition spectrale, 153
– de Pythagore, 113
– du point fixe, 6
– du graphe fermé, 85
– de prolongement d'une mesure, 25
Tribu, 12

Valeur
– régulière, 130
– propre, 130
– spectrale, 130

Voisinage, 1

Imprimé en France
par MAME Imprimeurs à Tours
Dépôt légal Septembre 1999 (N° 99082159)

La collection *Mathématiques 2e cycle* se propose de mettre à la disposition des étudiants de licence et de maîtrise de mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles.
Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels et de nombreux exercices. Les auteurs de ces ouvrages ont tous une grande expérience de l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

L'analyse fonctionnelle, qui a connu un développement spectaculaire depuis le début du siècle, est devenue un outil indispensable en mathématiques.
Outre son objet premier, qui est l'étude des espaces fonctionnels et de leurs opérateurs, ses applications sont diverses dans beaucoup de branches : équations aux dérivées partielles, analyse complexe, analyse globale, théorie des représentations…
Le but de ce livre, destiné aux étudiants de Licence et de Maîtrise de Mathématiques, est d'en exposer les éléments de base : mesure et intégration et espaces fonctionnels associés, théorème de l'application ouverte, théorème de Hahn-Banach sous ses versions analytique et géométrique, dualité dans les espaces normés, espace de Hilbert, opérateurs bornés et théorie spectrale illustrée par des applications au problème de Sturm-Liouville.
D'autres thèmes, proposés sous forme d'exercices et de problèmes corrigés, en complètent le contenu.

9 782729 849184